2 Лекция 2.
1 курс, 2 семестр 13 Февраля 2020.

2.1 Группы преобразований

Основным понятием, которое будет снова и снова появляться в наших лекциях, является симметрия. Сегодня я напомню основные математические понятия, необходимые для описания симметрий.

Пусть задано некоторое множество M (конечное или бесконечное). Рассмотрим некоторую совокупность обратимых преобразований

$$g : M \xrightarrow{g} M$$

с тождественным преобразованием e. Преобразование обратное к g обозначается g^{-1}.

Задача 2.1. Доказать, что преобразование g взаимно однозначно.

Определим композицию преобразований $g_1, g_2 \in G$ как последовательное применение

$$g_1 \circ g_2(f) = g_1(g_2(f)).$$

При таком определении ассоциативность очевидна:

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

Задача 2.2. Доказать.

Обратный элемент: $g^{-1} \circ g = e$.

Задача 2.3. Доказать, что $g \circ g^{-1} = e, \quad e \circ g = g \circ e = g$.

Определение абстрактной группы: Множество элементов g образует группу G с произведением $\circ$, если оно замкнуто относительно операции произведения $\circ$, $\quad g_1 \circ g_2 \in G$ $\forall g_{1,2} \in G$, и удовлетворяет аксиомам группы.

Задача 2.4. Сформулировать аксиомы группы.

Группы бывают абелевы (коммутативные): $f \circ g = g \circ f \ \forall f, g \in G$ и неабелевы.

2.2 Инварианты и орбиты

Пусть группа G действует на множестве M. Функция $I(m)$, $m \in M$ на M (со значениями где угодно) называется ($G-$) инвариантной, если

$$I(g(m)) = I(m)\,, \qquad \forall g \in G\,, \qquad m \in M. \tag{2.1}$$

Подмножество $M_0 \subset M$ называется инвариантным, если $G(M_0) \subset M_0$.

Задача 2.5. 2.5. Убедиться, что действие группы G задает отношение эквивалентности на M по правилу

$$g(m) \sim m\,, \qquad \forall g \in G. \tag{2.2}$$

Определение: классы эквивалентности образуют *орбиты* группы G в M.

Задача 2.6. Дать определение отношения эквивалентности и классов эквивалентности.

Примером множества инвариантного относительно G может служить сама группа G. При этом действие G на себе может быть задано тремя неэквивалентными способами:

Левое действие $g(f) := g \circ f$

Правое действие $g(f) := f \circ g^{-1}$.

Присоединенное действие $g(f) := g \circ f \circ g^{-1}$.

Задача 2.7. Убедится, что все три операции задают действие группы на себе согласованное с законом композиции в группе в том смысле, что

$$g_1(g_2(f)) = (g_1 \circ g_2)(f)\,.$$

.

Задача 2.8. Убедится, что по отношению к левому и правому действию G не содержит инвариантных подмножеств кроме всей G.

По отношению к присоединенному действию группа может содержать инвариантные подмножества $M \subset G$. Такие подмножества называются классами сопряженных элементов. Вообще говоря, они могут не образовывать подгрупп G. Тривиальный класс E образован единичным элементом e.

Определение: Любая *собственная* инвариантная подгруппа $H \subset G : H \neq G, E$ называется *нормальным делителем* G.

Определение: Группа G называется *простой*, если не содержит нетривиальных (т.е., отличных от e и G) нормальных делителей. Название *простая* дано по аналогии с простыми числами, которые ни на что не делятся кроме себя и единицы.

Простые группы образуют важный класс, допускающий полную классификацию в конечном и конечномерном случае (Картан). Конечномерные комплексные группы содержат четыре серии A_n, B_n, C_n, D_n ($n = 1, 2, \ldots$) и пять исключительных G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. Что скрывается за этими обозначениями мы будем постепенно выяснять.

Пусть H - некоторая подгруппа G. Очевидно G инвариантно относительно левого действия $H : h(g) = h \circ g$. Множество орбит H в G - *пространство классов смежности (фактор-пространство, косет)* G/H. Для произвольной подгруппы $H \subset G$, G/H не обладает групповой структурой. Но если H нормальный делитель, G/H наделяется групповой структурой.

Задача 2.9. Доказать.

2.3 Примеры

- Группа корней степени N из 1: циклическая группа $\mathbb{Z}_N$
- Целые числа по сложению: $\mathbb{Z}$.

- Группа перестановок N элементов: симметрическая группа S_N.
- Рациональные числа $\mathbb{Q}_N$ по сложению.
- Вещественные числа по сложению: $\mathbb{R}_N$.
- Группа невырожденных матриц $n \times n$: GL_n

$$A_i^j\,, \qquad i;j = 1\,, \qquad \ldots\,, \qquad n\,, \qquad \det A_i^j \neq 0.$$

- Группа матриц $n \times n$ с единичным детерминантом: SL_n

Задача 2.10. Как определяется произведение матриц?

Группы бывают конечные (с конечным числом элементов) и
бесконечные (с бесконечным числом элементов)

Задача 2.11. Какие из перечисленных групп конечны и бесконечны?

Число элементов группы G называется ее порядком $|G|$ ($\mathrm{ord}(G)$). В случае бесконечных групп порядком называется их мощность как множества.

Задача 2.12. Каковы порядки перечисленных групп?

Среди бесконечных (континуальных) групп выделенную роль играют непрерывные группы и их наиболее важный подкласс групп Ли. В этом случае говорят о *размерности группы* как о числе непрерывных координат, которые необходимо задать для определения элемента группы.

Задача 2.13. Какие из перечисленных групп непрерывны?

Задача 2.14. Каковы размерности $\mathbb{R}\,, GL_n\,, SL_n$?

3. Линейная алгебра

Задача 2.15. Дать определение поля и линейного пространства.

Базис: $\{e_i \in V\}$

$$\forall x \in V : x = \sum_i x^i e_i\,, \qquad x^i \in \mathbb{K} = \mathbb{R}\,, \qquad \mathbb{C}\,, \qquad x = 0 \to x^i = 0$$

Правило суммирования Эйнштейна: $\sum_i x^i e_i \equiv x^i e_i$

Подпространство $W \subset V$ это подмножество V, которое само имеет структуру линейного пространства. *Фактор-пространство* V/W это пространство классов эквивалентности

$$v \sim v + w \qquad \forall w \in W \tag{2.3}$$

Задача 2.16. Доказать, что такое определенное действительно задает отношение эквивалентности.

Задача 2.17. Доказать, что V/W обладает структурой линейного пространства.

Алгебра A это линейное пространство, снабженное операцией произведения

$$\forall a\,, b \in A \qquad ab \in A$$

такой, что

$$(\lambda a + \mu b)c = \lambda ac + \mu bc\,, \qquad c(\lambda a + \mu b) = \lambda ca + \mu cb\,, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}. \tag{2.4}$$

Алгебры бывают

- *Ассоциативные* и нет
- *Коммутативные* $ab = ba$ и некоммутативные
- *Унитальные* (с единичным элементом e) и нет.

$$e \in A: \quad ea = ae = a\,, \qquad \forall a \in A \tag{2.5}$$

- Комплексные матрицы $n \times n$ образуют алгебру $Mat_n(\mathbb{C})$ по отношению к матричному произведению.

Задача 2.18. Как определяется структура линейного пространства в алгебре матриц?

Задача 2.19. Какими свойствами обладает алгебра $Mat_n(\mathbb{C})$?

Еще пример: алгебра функций $f(x)$. Какие функции надо уточнять. Например, полиномы или квадратично интегрируемые функции.

Задача 2.20. Доказать для этих случаев, что они образуют алгебры.

Подалгебра $B \subset A$: подмножество, которое само является алгеброй.

Лекция 3.
1 курс, 2 семестр, 20 Февраля 2020

3.4 Алгебра - продолжение

Понятие групповой алгебры. Пусть G - конечная группа. $A(G)$ - групповая алгебра, которая по определению состоит из элементов векторного пространства

$$\sum_i \lambda^i g_i\,, \qquad \lambda^i \in \mathbb{K}\,, \qquad g_i \in G. \tag{3.1}$$

Здесь g_i перечисляют все элементы G, которые считаются линейно независимыми. Произведение базисных элементов g_i в $A(G)$ задается групповым законом композиции

$$g_i \circ g_j = f_{ij}^k\; g_k\,, \tag{3.2}$$

где f_{ij}^k удобно считать равным единице, если $g_k = g_i \circ g_j$ и нулем в остальных случаях.

Задача 3.1. Какими свойствами обладает групповая алгебра?

Задача 3.2. В чем отличие понятий ассоциативной алгебры и группы? Чем отличается алгебра матриц $Mat_n(\mathbb{C})$ от группы матриц $GL_n(\mathbb{C})$?

Линейное пространство $I \in A$ называется левым идеалом A если

$$ai \in I \qquad \forall i \in I\,, \qquad a \in A \tag{3.3}$$

Правый идеал определяется аналогично по отношению к правому умножению на $a \in A$.

Идеал I называется двусторонним, если он является одновременно левым и правым. Понятие двустороннего идеала в алгебре аналогично понятию нормальной подгруппы в группе. Фактор пространство A/I образует алгебру.

Задача 3.3. Доказать.

Замечание: Для коммутативных алгебр понятия левого, правого и двустороннего идеалов совпадают.

Рассмотрим пример алгебры A бесконечно дифференцируемых функций одной переменной $f(x)$. Рассмотрим идеал (какой?) I_n, образованный функциями вида $f(x) = x^n f(x)$.

Задача 3.4. Доказать, что I_n образует идеал.

Задача 3.5. Что за алгебра A/I_n? Допускает ли интерпретацию в терминах групповой алгебры?

3.5 Многообразия и их размерность

$\mathbb{R}^n$ - n-мерное векторное пространство $(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)\,, \qquad x^i$ с $i = 1\,, \ldots, n$ называются координатами $\mathbb{R}^n$. По определению, $\dim \mathbb{R}^n = n$. В общем случае многообразие локально (т.е., в окрестности любой точки) устроено так же как $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим подпространство $\mathbb{R}^n$, выделяемое р уравнениями

$$x_1 = 0\,, \ldots\,, x_p = 0. \tag{3.4}$$

Очевидно, это $\mathbb{R}^{n-p}$, а его размерность есть $n-p$. Этот факт оказывается совершенно общим: если координаты многообразия размерности n ограничить p уравнениями, обладающими определенными свойствами гладкости и невырожденности (например, не надо накладывать одно и то же уравнение дважды), то получится многообразие размерности $n-p$. Оказывается, любое многообразие может быть вложено в $\mathbb{R}^m$ достаточно большой размерности. Например, n-мерная сфера S_n задается одним уравнением

$$\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = R^2 \tag{3.5}$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$. По определению, S_n имеет размерность n. В общем случае, условие, что система p уравнений в $\mathbb{R}^n$

$$f^\alpha(x) = 0 \qquad\qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p\,, \qquad p \leq n \tag{3.6}$$

описывает многообразие M размерности $n-p$, есть

$$rank\Big|\frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^\alpha}\Big| = p \qquad \forall x \in M\,. \tag{3.7}$$

Замечание: уравнение сферы нулевого радиуса не удовлетворяет условию невырожденности, описывая одну точку $x^i = 0$. Точное определение понятия гладкого многообразия дается в курсе дифференциальной геометрии. Материал, этой и предыдущей лекций, содержит набор понятий, терминов и фактов, необходимых для изучения симметрий физических систем. Эти лекции в дальнейшем можно использовать как справочник.

3.6 Нерелятивистские симметрии

Начнем со школьной физики. Второй закон Ньютона имеет вид.

$$m\ddot{x}^i(t) = F^i(x(t)) \tag{3.8}$$

где $x^i(t)$ - координаты частицы массы m в момент времени t. Как обычно, точка обозначает дифференцирование по времени

$$\dot{a} := \frac{\partial a}{\partial t}\,, \tag{3.9}$$

$F(x)$ - сила, действующая на частицу в точке x. Начнем со случая нулевой внешней силы

$$m\ddot{x}^i(t) = 0\,. \tag{3.10}$$

В этом случае общее решение динамических уравнений имеет вид

$$x^i(t) = {x^i}_0 + v^i t\,, \tag{3.11}$$

выражающий первый закон Ньютона: свободная частица движется прямолинейно и равномерно.

Каковы симметрии уравнения Ньютона с $F^i = 0$? Эквивалентно, какие преобразования переводят решение в решение?

Сдвиги пространства на постоянный вектор a^i :

$$x^i(t) \to x^i_0(t) = x^i(t) + a^i\,, \qquad\qquad \dot{a}^i = 0 \tag{3.12}$$

На решениях

$$x^i_0 \to x^i_0 + a^i \tag{3.13}$$

Сдвиги времени

$$t \to t + T\,, \qquad x(t) \to x(t+T)\,, \qquad x^i_0 \to x^i_0 + T v^i \tag{3.14}$$

Хотя эти преобразования похожи по форме на сдвиги пространства, отличие в том, что величина сдвига зависит от скорости частицы, т.е. различна для разных частиц.

Переход к другой инерциальной системе, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью u

$$x^i(t) \to x^i(t) + u^i t \tag{3.15}$$

Очевидно, на решениях (3.11) это дает нерелятивистский закон сложения скоростей

$$v^i \to v^i + u^i \tag{3.16}$$

Все перечисленные преобразования входят в группу Галилея.

Задача 3.6. Проверить, что они действительно образуют группу.

А что еще мы не рассмотрели? Очевидно, уравнения (3.10) переходят в себя при линейных преобразованиях

$$x^i(t) \to A^j_i x_j(t) \tag{3.17}$$

с произвольной постоянной невырожденной матрицей

$$A^j_i\,, \qquad \det A^j_i \neq 0.$$

Задача 3.7. Какую группу образуют эти преобразования?

Пусть G - группа всех перечисленных преобразований.

Задача 3.8. Содержит ли G нетривиальные нормальные делители? Если да, то какие? Что будет минимальной фактор-группой G/N?

Совокупность симметрий уравнений свободного движения G выходит за рамки группы Галилея.

Задача 3.9. В чем отличие?

Например G содержит подгруппу растяжений с $A^i_j = a\delta^i_j$, где $a \neq 0$, а δ^i_j как обычно обозначает единичную матрицу. Очевидно, при таких преобразованиях

$$x^i(t) \to ax^i(t)\,. \tag{3.18}$$

Такие преобразования называются дилатациями. Они входят в группу конформных преобразований, которая проявляется при высоких энергиях и при изучении фазовых переходов.

В действительности, группа симметрий свободных уравнений частицы еще больше. Например, в нее входят растяжения времени.

Задача 3.10. Определить их действие.

В группу Галилея входит лишь подгруппа трехмерных вращений и отражений $O(3) \subset GL(3)$. Чтобы в этом разобраться, на следующей лекции мы рассмотрим более реалистическую ситуацию со взаимодействующими частицами.

Задача 3.11. Вычислить размерность группы Галилея.

Рассмотренный пример иллюстрирует общее явление: симметрии свободных динамических систем обычно ниже, чем симметрии систем со взаимодействием (силами). В рассмотренном случае группа $GL(3)$ редуцируется до своей подгруппы $O(3)$.

Задача 3.12. Чему равен аналог группы $GL(3)$ для N свободных (невзаимодействующих) частиц?

4 Лекция 4 курс, 2 семестр, 27 Февраля 2020

4.1 Нерелятивистские симметрии - продолжение

Сегодня продолжим рассмотрение симметрий нерелятивистских систем частиц, перейдя к уравнениям взаимодействующих частиц. Для этого вспомним, как взаимодействуют точечные частицы в нерелятивистской (ньютоновской) гравитации или заряженные частицы в электростатике. Пусть разные частицы занумерованы индексом $\alpha, \beta = 1, \ldots, N$. Тогда силы между парой частиц с номерами и в электростатике и нерелятивистской теории тяготения имеют вид

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\varepsilon_a |x_\alpha - x_\beta|^3}(x^i_\alpha - x^i_\beta)\,, \qquad |x_\alpha - x_\beta| = \sqrt{\sum_k |x^k_\alpha - x^k_\beta|^2} \tag{4.1}$$

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = \frac{m_\alpha m_\beta}{|x_\alpha - x_\beta|^3}(x^i_\alpha - x^i_\beta) \tag{4.2}$$

Еще один известный вам тип сил отвечает частицам, связанным пружинкой:

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = k(x^i_\alpha - x^i_\beta) \tag{4.3}$$

Уравнения движения для частицы с номером имеют вид

$$m\ddot{x}^i_\alpha(t) = \sum_{\alpha\neq\beta} F^i(\vec{x}_\alpha(t) - \vec{x}_\beta(t)). \tag{4.4}$$

Важным свойством всех этих уравнений является то, что величина силы зависит только от расстояния между частицами, а направление определяется вектором разности векторов их положений. Такие силы называются центрально симметричными. Поскольку расстояние между точками инвариантно относи тельно поворотов, то уравнения взаимодействующих частиц инвариантны отно сительно подгруппы группы $GL(3)$, которая не меняет расстояний. Эта группа называется ортогональной группой $O(3)$.

Задача 4.1. Убедиться, что преобразования (3.12)-(3.15) по-прежнему задают симметрии уравнений (4.4). В совокупности с $O(3)$ эти преобразования задают группу Галилея в трех- мерном пространстве, являющуюся фундаментальной симметрией нереляти вистской физики. Чему равна размерность группы Галилея? Прежде чем заняться более детальным изучением ортогональных групп сде лаю следующее важное замечание. Симметрия уравнений (4.1) и (4.2) выше, чем группа Галилея. Действительно, кроме преобразований из группы Галилея, эти уравнения инвариантны от носительно растяжений

$$x^i_\alpha \to \lambda x^i_\alpha\,, \qquad t \to \mu t\,, \tag{4.5}$$

если параметры растяжений λ и μ связаны определенным образом.

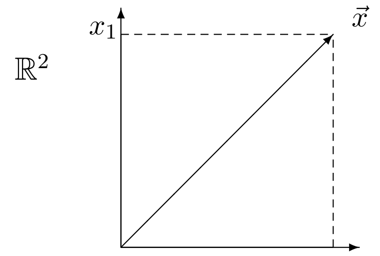
Задача 4.2. Найти как связаны λ и μ.

Забегая вперед скажу, что это не случайно: уравнения электродинамики и (линейной) гравитации обладают конформной симметрией из-за того, что элек тромагнитное и гравитационное поля безмассовы - распространяются со скоро стью света. Уравнения (4.3) также обладают дополнительной симметрией.

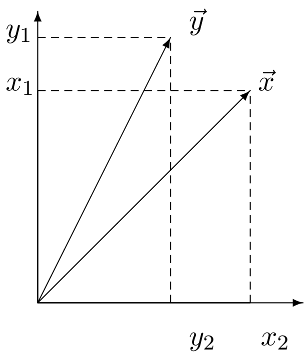
Задача 4.3. Найти какой. Это также не случайно, и связано с интегрируемостью (точной решаемо стью) системы (4.3). Но если в системе присутствуют силы обоих типов (на пример, упругие и электростатические), то конформная симметрия исчезает (нарушается).

4.2 Движения эвклидового пространства

Рассмотрим двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$. Точки плоскости задаются векторами $\vec{x}$-



Пусть заданы две точки $\vec{x}$ и $\vec{y}$.



Расстояние между точками вычисляется по теореме Пифагора

$$l^2 := (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \tag{4.6}$$

Преобразования координат, сохраняющие расстояния, называются движения- ми плоскости. Имеется два типа движений.

1. Сдвиги

$$\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}; \vec{y} \to \vec{y} + \vec{a}. \tag{4.7}$$

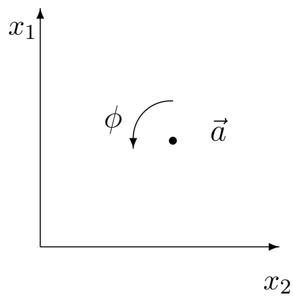
$\vec{a}$ - вектор сдвига. t_a - оператор сдвига.

$$t_a(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}. \tag{4.8}$$

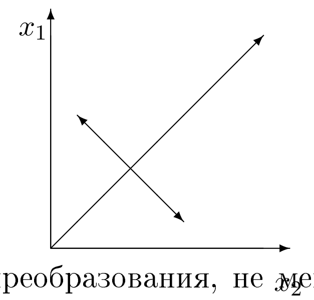
Сдвиги t_a образуют группу трансляций T^2. Мы уже встречали эту группу при анализе симметрий нерелятивистских уравнений. Эта группа абелева

$$t_a t_b = t_b t_a. \tag{4.9}$$

Задача 4.4. Следствием какого свойства векторов является этот факт?
Задача 4.5. Какое многообразие образует T^2? Какова его размерность?
2. Вращения $SO(2)$: $M_{a\phi}$ - поворот на угол ϕ вокруг точки a.



3. Отражения относительно любой прямой



Аналогично, преобразования, не меняющие длин в $\mathbb{R}^n$, образуют группу дви- жений евклидового пространства En. Такие преобразования допускают анали- тическое представление

$$x^i \to x'^i = A^i_j x^j + a^i\,, \qquad i,j = 1\,,\ldots,\,n \tag{4.10}$$

где a^i описывает сдвиг, а матрица A^i_j - ортогональное преобразование при условии, что

$$A^i_k A^j_l \delta_{ij} = \delta_{kl}. \tag{4.11}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование). Условие (4.27) бук- вально выражает условие инвариантности расстояния

$$l^2 := \delta_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j). \tag{4.12}$$

Задача 4.6. Убедиться

Заметим, что единичная матрица δ_{ij} с двумя нижними индексами задает метрику евклидового пространства E^n в декартовых координатах.

4.3 Ортогональная группа

Матрицы A^i_j, удовлетворяющие условию (4.11), образуют ортогональную груп- пу $O(n)$, если $i, j = 1\,,\ldots,\,n$. Единичный элемент задается единичной матрицей $A^i_j = \delta^i_j$.

Задача 4.7. Убедиться, что единичная матрица удовлетворяет (4.11).

Задача 4.8. Проверить групповое свойство: матрица AB удовлетворяет (4.11), если A и B удовлетворяют (4.11).

Из условия (4.11) следует, что

$$(\det A^i_j)^2 = 1 \to \det A^i_j = \pm 1. \tag{4.13}$$

В частности, отсюда следует, что матрицы A, удовлетворяющие (4.11), обратимы. В качестве примера ортогональной матрицы с детерминантом -1, можно взять матрицу A^i_j с компонентами

$$A^1_1 = -1\,, \qquad A^n_n = 1 \text{ for } n \neq 1\,, \qquad A^n_m = 0 \text{ for } n \neq m. \tag{4.14}$$

Преобразование (4.10) описываемое такой матрицей A^i_j и сдвигом $a^i = 0$ дает преобразования

$$x^1 \to -x^1\,, \qquad x^n \to x^n \text{ for } \neq 1. \tag{4.15}$$

Иными словами, эта матрица описывает отражение оси x^1. Очевидно, для этой матрицы

$$\det A^i_j = -1. \tag{4.16}$$

Специальная ортогональная группа $SO(n)$, которая и описывает истинные вращения, состоит из матриц с единичным детерминантом

$$\det A = 1 : \qquad SO(n). \tag{4.17}$$

Очевидно, $SO(n)$ - подгруппа $O(n)$. Преобразования из $O(n)$ с $\det A = -1$ со- держат отражения.

Задача 4.9. Убедиться, что такие преобразования не связаны непрерывным образом с единичным элементом $O(n)$. (Эквивалентно, не принадлежат связной компоненте единицы $O(n)$).

Теперь вычислим размерность $O(n)$, т.е. сколько независимых вращений в $O(n)$. Матрицы A^i_j содержат n^2 компонент (т.е. могут рассматриваться как ко- ординаты в $\mathbb{R}^{n^2}$). Они подчинены уравнениям (4.11). В силу симметрии по индексам $k\,, l$ (4.11) содержат $\frac{1}{2}n(n+1)$ уравнений. Значит, в силу теоремы о неявной функции, размерность $O(n)$ равна

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1). \tag{4.18}$$

Замечание. Условие невырожденности (3.7) несложно проверить: используя, что $O(n)$ - группа, его достаточно проверить при $A^i_j = \delta^i_j$ (сначала продифферен цировать в (3.7), а потом положить $A^i_j = \delta^i_j$).

Задача 4.10. Найти $\dim\, SO(n)$.

Группа $O(n)$ состоит из двух непересекающихся кусков. Один из них - это $SO(n)$. А другой - той же размерности - образован матрицами с $\det(A) = -1$. Размерность $SO(n)$ определяет число независимых поворотов. Очевидно, размерность $SO(n)$ совпадает с числом двумерных плоскостей, натянутых на орты в $\mathbb{R}^n$. Т.е. каждой такой плоскости отвечает свой поворот - поворот этой плоскости. Как и ожидалось, $\dim SO(3) = 3$.

Чтобы понять как решения уравнения (4.11) задают повороты и отражения, рассмотрим более подробно группу двумерных вращений $O(2)$. В этом случае, уравнения (4.11) дают

$$(A_1^1)^2 + (A_1^2)^2 = 1\,, \tag{4.19}$$

$$(A_2^1)^2 + (A_2^2)^2 = 1\,, \tag{4.20}$$

$$A_1^1 A_2^1 + A_1^2 A_2^2 = 0\,. \tag{4.21}$$

Первые два уравнения легко решить в виде

$$A_1^1 = \cos\varphi_1\,, \qquad A_1^2 = \sin\varphi_1 \tag{4.22}$$

$$A_2^2 = \cos\varphi_2\,, \qquad A_2^1 = \sin\varphi_2 \tag{4.23}$$

Последнее приобретает вид

$$0 = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{4.24}$$

Это уравнение имеет два решения

$$\varphi_2 = -\varphi_1 \tag{4.25}$$

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1 \tag{4.26}$$

Первое решение описывает поворот на угол φ_1, а второе - отражение.

Задача 4.11. Доказать. Вычислить детерминанты матрицы A_j^i в этих случаях. Найти отражение, описываемое уравнением (4.26).

Задача 4.12. Доказать, что уравнение (4.11) эквивалентно уравнению

$$A_k^i A_l^j \delta^{kl} = \delta^{ij}\,, \tag{4.27}$$

т.е., всякое решение (4.11) является решением (4.27) и наоборот.

5 Лекция 5.
1 курс, 2 семестр 5 Марта 2020.

5.1 Группы преобразований

На прошлой лекции мы определили ортогональную группу как группу преобразований, сохраняющих расстояния

$$l^2 = (x^i - y^i)(x^j - y^j)\eta_{ij}\,.$$

В конце прошлой лекции я обещал рассказать, что такое двойственное пространство и транспонированная матрица. Последнее понятие тесно связано с ортогональной группой.

5.1.1 Двойственное пространство

Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. *Двойственное пространство* V^* определяется как пространство линейных отображений из V в $\mathbb{K}$. Отображение $f(V)$ называется линейным если

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \qquad \forall \quad v_{1,2} \in V\,, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{K}\,.$$

Действительно, линейные отображения образуют линейное пространство, если определить линейную комбинацию отображений f_1 и f_2 по правилу

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v) = \lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v)$$

Задача 5.1. Доказать, что такое определение задает линейное отображение.

Пусть $\{e_i\}$ задает базис в V. Тогда любой вектор $v \in V$ представляется в виде

$$v = v^i e_i$$

с некоторыми коэффициентами v^i, а любое линейное отображение $f(v)$ задается в виде

$$f(v) = v^i f_i\,,$$

где f_i - некоторые коэффициенты со значениями в $\mathbb{K}$.

Задача 5.2. Доказать.

Элемент V^* можно представить в виде

$$f = f_i e^i\,,$$

где e^i - базисные элементы V^* такие, что

$$e^i(e_j) = \delta^i_j\,.$$

Отмечу, что в этих обозначениях базисные элементы V и V^* отличаются лишь положением индекса. Поэтому за положением индекса надо следить.

Задача 5.3. Доказать, что $(V^*)^* = V$.

Замечание. Этот факт верен в конечномерном случае, но может не иметь места в бесконечномерном.

5.1.2 Билинейные формы и транспонирование

Билинейной формой называется отображение

$$B(v\,,w) \in \mathbb{K}\,,$$

которое ставит в соответствие каждой паре векторов $v\,,w \in V$ число (элемент поля $\mathbb{K}$) и обладает следующими свойствами

$$B(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\,,w) = \lambda_1 B(v_1, w) + \lambda_2 B(v_2, w)\,,$$

$$B(v\,,\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 B(v, w_1) + \lambda_2 B(v, w_2)$$

$\forall v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V\,,\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{K}$.

Билинейные формы бывают симметричные $B(v,w) = B(w,v)$ и антисимметричные. (Формы, не обладающие определенной симметрией, тоже можно рассматривать, но обычно они менее интересны.) Форма $B(v\,,w)$ называется невырожденной, если не существует такого $v_0 \in V$, что $B(v_0\,,w) = 0\,\forall w$. (Если такой v_0 существует, то он называется нуль-вектором формы.)

Пусть $\{e_i\}$-базис V. Тогда можно определить матрицу

$$\eta_{ij} := B(e_i, e_j)\,. \tag{5.1}$$

Эта матрица (анти)симметрична, если форма $B(v,w)$ (анти)симметрична. Матрица η_{ij} (не)вырождена если форма $B(v,w)$ (не)вырождена.

Задача 5.4. Доказать.

Пусть линейный оператор A действует на V и $B(v,w)$ - невырожденная билинейная форма. Тогда оператор A' транспонированный к A по отношению к форме $B(v,w)$ задается сотношением

$$B(v, A(w)) = B(A'(v), w)\,, \qquad \forall v, w \in V\,. \tag{5.2}$$

Пусть в базисе $\{e_i\}$ оператор A задан соотношениями

$$A(e_i) = A_i{}^j e_j\,,$$

с некоторыми $A_i{}^j \in \mathbb{K}$. Тогда из (5.1) следует

$$\eta_{ik} A_j{}^k = A'^k_i \eta_{kj} \qquad \Longrightarrow \qquad A'^j_i = \eta_{ik} A_l{}^k \eta^{-1lj}\,, \tag{5.3}$$

где обратная матрица η^{-1lj} определяется соотношением

$$\eta_{ik}\eta^{-1kj} = \delta_i^j\,.$$

Если билинейная форма имеет вид $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, то это дает обычное транспонирование.

Задача 5.5. Убедиться

Из формулы (5.2) следует, что

$$(AB)' = B'A'$$

Задача 5.6. Доказать.

В случае вещественного поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ билинейная форма называется *Положительно определенной*, если

$$B(v,v) \geq 0\,, \qquad B(v,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

о

По определению, группа вращений $O(n)$ это группа линейных преобразований n-мерного линейного пространства V, оставляющая инвариантной положительно определенную билинейную форму. Иными словами

$$A \in O(n) \quad \Rightarrow \quad B(A(v), A(w)) = B(v,w)\,.$$

Отсюда следует

$$A'A = Id\,,$$

где транспонирование определяется по отношению к форме B.

В такой форме это определение не зависит от выбора базиса в V, который влияет на вид η_{ij}. Действительно, при переходе к новому базису

$$e'_i = U^i{}_j e^j$$

коэффициенты билинейной формы меняются следующим образом

$$\eta'^{ij} = U^i{}_k U^j{}_l \eta^{kl}\,.$$

Прежде чем переходить к изучению ортогональной группы мы можем теперь немного расшифровать смысл картановской классификации.

Группа $B_n = O(2n{+}1)$, $D_n = O(2n)$. C_n симплектическая группа, которая по определению оставляет инвариантной невырожденную антисимметричную форму n-мерного векторного пространства называемую симплектической формой.

Задача 5.7. Доказать, что это возможно только для четных n.

Наконец, A_n - это группа SL_{n+1} матриц $(n{+}1)\times(n{+}1)$ с единичным детерминантом.

Задача 5.8. Доказать, что ортогональные матрицы, удовлетворяющие условию удовлетворяют и условию ортогональности для обратной билинейной формы ...

6 Лекция 6.
1 курс, 2 семестр 12 Марта 2020.

6.1 Движения эвклидова пространства

Движением евклидова пространства называется такое преобразование, которое не меняет длин и углов. Общее движение R^n является комбинацией поворота и сдвига

$$x^i \to x'^i = A^i{}_j x^j + a^i\,, \qquad i,j = 1\dots n \tag{6.1}$$

где матрица $A^i{}_j$ принадлежит ортогональной группе $O(n)$. Совокупность таких преобразований образует группу движений n-мерного евклидова пространства, обозначаемую как $E(n)$ или $IO(n)$.

Задача 5.1. Найти $dim\, E(n)$.

Обозначая сдвиг на a^i как t_a и поворот вокруг начала координат, задаваемый матрицей $A^i{}_j$, как M^0_A, любой элемент $E(n)$ можно представить в виде

$$G_{A,a} = t_a M^0_A\,. \tag{6.2}$$

Рассмотрим преобразование

$$M^a_A := t_a M^0_A t_a^{-1}\,.$$

Задача 6.1. Показать, что M^a_A реализуется как

$$x'^i = A^i{}_j(x^j - a^j) + a^i$$

Оно описывает поворот вокруг точки $x^i = a^i$, поскольку она остается неподвижной. (Отметим, что, как легко видеть, у чистых (т.е. нетривиальных) сдвигов неподвижных точек нет.)

Таким образом, поворот вокруг точки a^i сводится к такому же повороту вокруг начала координат в комбинации со сдвигом на $a^i - A^i{}_j a^j$ В результате, группа $E(n)$ порождается сдвигами и поворотами вокруг любой точки.

Рассмотрим теперь преобразование $M^0_A t_a M^0_{A^{-1}}$. Очевидно, оно дает

$$x'^i = A^i{}_j(A^{-1j}{}_k x^k + a^j) = x^i + A^i{}_j a^j\,.$$

Отсюда следует, что $M^0_A t_a M^0_{A^{-1}} = t_{Aa}$. Это, в частности, означает, что M^0_A и t_a некоммутативны, т.е., поменяв в (6.2) M и t местами, мы получим другой элемент $E(n)$.

Так как для сдвигов также выполняется $t_b t_a t_{-b} = t_a$, отсюда следует, что подгруппа сдвигов $T(n)$ является нормальным делителем $E(n)$.

Задача 6.2. Доказать, что $H = M^0_A$ не является нормальным делителем $E(n)$.

Группа $E(n)$ действует в $\mathbb{R}^n$. Напомню, что орбитой точки x под действием группы G называется множество точек Gx. Легко видеть, что орбитой любой точки $\mathbb{R}^n$ под действием $E(n)$, а также под действием подгруппы сдвигов $T(n)$, является все пространство $\mathbb{R}^n$.

А как выглядят орбиты точек $\mathbb{R}^n$ под действием группы $O(n)$, реализованной преобразованиями вида M_A^0? Они представляют собой $n-1$ - мерные сферы S^{n-1} радиуса R, если соответствующие x находятся на расстоянии R от начала координат. Вследствие этого $O(n)$ является группой движений S^{n-1}. Размерность ортогональной группы есть $dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотрим окружность S^1 и функции на ней $f(\phi)$, где $\phi \in [0, 2\pi)$ – угол. Поворот на этом языке – это сдвиг $\varphi \to \varphi + \psi \, mod \, 2\pi$, где ψ – другой угол. Таким образом, $SO(2)$–это трансляция с периодической координатой.

Какие еще преобразования, помимо движений, можно рассматривать? Можно, например, рассмотреть совокупность преобразований, от которых требуются только гладкость (дифференцируемость)и взаимнооднозначность. Они называются диффеоморфизмами. Диффеоморфизмы многоообразий типа плоскости или окружности можно представлять себе как растяжения и сжатия резинки соответствующей топологии.

Существует также важный класс конформных преобразований, которые могут менять расстояния, но сохраняют углы. Имеется два типа таких преобразований:

(1) дилатации $x'^i = ax^i \; a \in \mathbb{R}$.

(2) инверсии $x'^i = \frac{bx^i}{x^2} \; b \in \mathbb{R}$.

Задача 6.3. Проверить.

Рассмотренные нами группы $E(n)$, $T(n)$, $O(n)$ являются примерами групп Ли, т.е. групп, элементы которых задаются непрерывными параметрами (координатами). Таким образом, группы Ли представяют собой многообразия (поверхности), которые действуют сами на себе.

Примеры:

(1) группа сдвигов $T(n)$ сама представляет собой пространство $\mathbb{R}^n$ (каждая точка $\mathbb{R}^n$ задает сдвиг в $\mathbb{R}^n$) и действует на себе естественным образом: $t_a b^i = a^i + b^i$.

(2) каждая точка ψ окружности S^1 задает сдвиг S^1 $t_\psi \varphi = \varphi + \psi \, mod \, 2\pi$

(3) $O(n)$– это поверхность, вложенная в R^{n^2} с координатами $X^i{}_j$, удовлетворяющими условию ортогональности

$$X^i{}_k X^j{}_l \eta_{ij} = \eta_{kl} \, ,$$

где η_{ij} - симметричная положительно определенная билинейная форма.

Задача 6.4. Доказать, что матрицы $X^i{}_j$, удовлетворяющие условию ортогональности, удовлетворяют условию

$$X^i{}_k X^j{}_l \eta^{kl} = \eta^{ij} \, ,$$

где η^{ij} обозначает обратную матрицу к η_{ij}

$$\eta^{ik} \eta_{kj} = \delta^i_k \, .$$

Условие напоминает уравнение сферы $x^i x_i = R^2$, но, в отличие от последнего, допускает действие на себе.

Задача 6.5. Сравнить размерности $O(n)$ и $SO(n)$.

6.2 Однородные пространства

Пространство M, на котором задано действие группы G, называется G- однородным, если $\forall x_1, x_2 \in M$ существует $g \in G$ такой, что $x_2 = gx_1$. Иными словами, пространство M-однородно, если G переводит любую его точку в любую другую.

Важная теорема, которую я оставлю Вам в качестве домашнего задания, гласит:

Все G-однородные пространства M являются косетами $M = G/H$, где H–группа стабильности (симметрии) любой точки M.

Задача 6.6. Доказать, что H не зависит от выбора точки в G-однородном M.

Таким образом, однородные пространства можно описывать на теоретико- групповом языке.

Важным примером однородного симметричного пространства является n-мерная сфера S^n.

Задача 6.7. Доказать, что $S^n = O(n+1)/O(n)$.

Другой пример связан с действием $E(n)$ на $\mathbb{R}^n$, которое, очевидно, однородно. Подгруппа стабильности точки $x = 0$ – это $O(n)$. Согласно теореме, отсюда следует, что $\mathbb{R}^n = E(n)/O(n)$.

Задача 6.8. Доказать.

Имеет место и другое схожее соотношение. А именно, поскольку $T(n)$ есть нормальный делитель $E(n)$, то косет $E(n)/T(n)$ должен образовывать группу. Действительно, из (6.1) видно, что $E(n)/T(n) = O(n)$.

Задача 6.9. Доказать.

Отмечу, что из полученных соотношений $E(n)/T(n) = O(n)$ и $E(n)/O(n) = T(n)$ вовсе не следует, что как группа $E(n)$ эквивалентно $T(n) \times O(n)$, где $\times$ обозначает прямое (декартово) произведение. С косетами нельзя (за исключением специальных случаев) обращаться как с арифметическими дробями.

7 Лекция 7.
1 курс, 2 семестр 26 Марта 2020.

7.1 Представления и модули

Группы удобно реализовывать линейными операторами в векторных пространствах. *Представление группы* G это ее реализация эндоморфизмами некоторого линейного пространства V

$$G \to End\, V.$$

Это означает, что каждому $g \in G$ сопоставляется оператор t_g в линейном пространстве V так, что его действие согласовано с действием группы

$$t_{g_1} t_{g_2} = t_{g_1 g_2}\,, \qquad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Замечу, что в представлении ассоциативность действия группы достигается автоматически в следствие ассоциативности эндоморфизмов. Единичному элементу G сопоставляется единичное преобразование

$$t_e = Id$$

Совокупность операторов (матриц) t_g образует *представление* T группы G. Линейное пространство V, в котором действуют матрицы t_g, называется пространством представления или *G-модулем.* Часто G-модуль ассоциируется с совокупностью T, V.

Пусть $G = O(n)$. Какой $O(n)$-модуль мы уже знаем?

Задача 7.1. Убедиться, что $\mathbb{R}^n$ образует $O(n)$-модуль

Решение

$$O\vec{x} = \vec{x}' \in \mathbb{R}^n\,,$$

где O – ортогональная матрица.

Пусть V_1 и V_2 два G-модуля.

Задача 7.2. Задать действие G на $V_1 \oplus V_2$.

Решение

Пусть $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$. Запишем их в единый столбец, а действие на нем определим следующим образом

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} \in V_1 \oplus V_2\,, \tag{7.1}$$

где матрицы G_1 и G_2 реализуют действие группы G на пространствах V_1 и V_2, соответственно.

Такой модуль называется *прямой суммой* модулей $V_1 \oplus V_2$.

Подмодулем V называется подпространство $W \in V$, которое само образует G-модуль.

Задача 7.3. Убедиться, что в прямой сумме $V_1 \oplus V_2$ V_1 и V_2 являются подмодулями.

Определение: G-модуль V называется *неприводимым,* если он не содержит нетривиальных (т.е. отличных от V и $\emptyset$) подмодулей. Соответственно, приводимый модуль содержит хотя бы один нетривиальный подмодуль.

Задача 7.4. Доказать, что $O(n)$-модуль $\mathbb{R}^n$ неприводим.

Как мы увидим, группы симметрий обычно реализуются в терминах линейных преобразований, т.е. модулей. Неприводимые модули играют роль строительных кирпичей при реализации симметрий. Важно, что неприводимые модули простых групп допускают осмысленную классификацию.

Важное замечание состоит в том, что не всякий приводимый модуль сводится к прямой сумме подмодулей. В общем случае возможна следующая треугольная ситуация. Пусть V_1 и V_2 два линейных пространства, как линейное пространство $V = V_1 \oplus V_2$ и G-модуль реализован так, что

$$G(V_1) \subset V_1\,, \qquad G(V_2) \subset V$$

Очевидно, в этом случае V_1 является подмодулем G-модуля V, но V не сводится к прямой сумме $V_1 \oplus V_2$. (Для чего нужно, чтобы $G(V_2) \subset V_2$). Приводимые модули, которые не сводятся к прямой сумме, называются *невполне приводимыми* или *неразложжымыми.*

Неразложимые модули имеют большое значение в таких физических моделях как, например, электродинамика, где они связаны с так называемыми калибровочными симметриями. Надо отметить, что неразложимых модулей относительно мало и они также поддаются классификации на языке теории гомологий.

Это делается так. Пусть W подмодуль G-модуля V. Тогда подпространство V/W образует G-модуль.

Задача 7.5. Доказать формально и объяснить смысл происходящего на языке матриц.

Решение

Пусть действие некоторой группы G на пространстве $V = U \oplus W$ можно представить матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Здесь A, B и C – некоторые матрицы. Легко проверить, что произведение матриц такого типа даст матрицу того же типа. При следующем действии группа G на векторном пространстве V

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

имеется инвариантный подмодуль. Вектора типа

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

представляют инвариантное подпространство относительно действия группы определенного выше. Фактор-пространство V/W устроено таким образом, что вектора

$$\begin{pmatrix} u \\ w_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

эквивалентны. Мы в праве выбрать **любого** представителя, например,

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Тогда действие группы G на фактор-пространстве V/W это

$$(A)\,(u) \tag{7.7}$$

Задача 7.6. Убедиться

На языке *теории гомологий (математической чепухи)* происходящее описывается гомологической последовательностью

$$0 \to W \to V \to V/W \to 0\,,$$

где каждая стрелка обозначает гомоморфизм представлений (модулей).

Эта *гомологическая последовательность* является *точной*, что означает, что образ предыдущего отображения является ядром предыдущего.

Задача 7.7. Доказать.

7.2 Алгебры Ли и группы Ли

Алгебры Ли дают эффективный инструмент анализа симметрий путем анализа бесконечно малых симметрий. Рассмотрим группу Ли G размерности n, т.е. G описывается n непрерывными координатами типа углов поворотов, сдвигов и т.п.. Пусть $g \in G$ элемент группы близкий к единичному, а ϵ^i - бесконечно малые координаты группы в окрестности единичного элемента. Например, ϵ^i может описывать бесконечно малый сдвиг или поворот.

Чтобы не погружаться в тонкости геометрии групп Ли удобно рассмотреть не группу Ли G, а ее произвольное представление T с элементами $t^{\alpha}_{g\,\beta}$, где g элемент группы, которому отвечает матрица t_g. В случае, когда они бесконечно близки к единице,

$$t_g{}^{\alpha}{}_{\beta}(\epsilon) = \delta^{\alpha}_{\beta} + \epsilon^i t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} + o(\epsilon)\,, \tag{7.8}$$

где δ^{α}_{β} - единичный оператор (матрица), а $t_i{}^{\alpha}{}_{\beta}$ - некоторый набор n матриц (n– размерность, группы) размерности $m \times m$, действующих в m-мерном G-модуле V

$$t_i(e^{\alpha}) = t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} e^{\beta}\,, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots m\,, \qquad i = 1, \ldots n\,. \tag{7.9}$$

ϵ_i - численные параметры, считающиеся бесконечно малыми и имеющие смысл координат на группе в инфинитезимальной окрестности единицы. При этом предполагается, что любой элемент в инфинитезимальной окрестности единичного элемента G может быть представлен в виде (7.9) с некоторыми ϵ_i. Математически это означает, что группа Ли это многообразие, т.е. в окрестности любой точки ведет себя как $\mathbb{R}^{dimG}$.

Для дальнейшего анализа полезно рассмотреть члены до второго порядка малости, чтобы затем убедиться, что члены второго порядка вклада не дадут

$$t_g{}^{\alpha}{}_{\beta}(\epsilon) = \delta^{\alpha}_{\beta} + \epsilon^i t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} + +\epsilon^i \epsilon^j s_{ij}{}^{\alpha}{}_{\beta} + o(\epsilon^2)\,. \tag{7.10}$$

Вычислим обратный элемент.

Задача 7.8. Убедиться, что

$$t_{g^{-1}}{}^{\alpha}{}_{\beta}(\epsilon) = \delta^{\alpha}_{\beta} - \epsilon^i t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} - \epsilon^i \epsilon^j s_{ij}{}^{\alpha}{}_{\beta} + \epsilon^i \epsilon^j t_i{}^{\alpha}{}_{\gamma} t_j{}^{\gamma}{}_{\beta} + o(\epsilon^2)\,. \tag{7.11}$$

Пусть g_1 и g_2 два элемента G близкие к единичному. Рассмотрим следующий элемент

$$g_{1,2} := g_1 g_2 g_1{}^{-1} g_2^{-1} \in G\,, \tag{7.12}$$

который также будет близок к единичному.

Пусть ϵ_1^i и и ϵ_2^i инфинитезимальные координаты g_1 и g_2 , соответственно. Вычислим

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}$$

с точностью до членов второго порядка. Прямое вычисление довольно громоздко, но окончательный ответ оказывается простым и может быть легко получен с помощью простой леммы:

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \qquad \text{при} \quad \epsilon_1 = 0 \quad \text{или} \quad \epsilon_2 = 0\,. \tag{7.13}$$

Задача 7.9. Доказать, учитывая, что $g(\epsilon)|_{\epsilon=0} = e$.

Замечу, что выражение (7.12) выбрано именно с таким расчетом, чтобы было удобно использовать лемму (7.13).

Из Леммы (7.13) следует, что все члены, содержащие только ϵ_1 или ϵ_2 сокращаются и, с точностью до членов старших порядков, остаются только члены, содержащие $\epsilon_1\epsilon_2$. Последние нетрудно вычислить. В частности, из Леммы (7.13) следует, что члены второго порядка по ϵ в (7.10) и (7.11) не дают вклада в рассматриваемом приближении, т.е. при вычислении достаточно использовать (7.8) и

$$t^{\alpha}_{g^{-1}(\epsilon)\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \epsilon^i t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} + \dots \tag{7.14}$$

Поскольку ϵ_1 входит через g_1 и g_1^{-1}, то член линейный по ϵ_1 может появиться через одну из двух комбинаций $t_{g_1} t_{g_2} t_{g_2{}^{-1}}$ или $t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}$ Но так как $t_{g_1} t_{g_2} t_{g_2}^{-1} = t_{g_1}$, этот член зависит только от ϵ_1 и, следовательно, не дает вклада в окончательный ответ по Лемме (7.13). Таким образом, остается вычислить члены порядка $\epsilon_1\epsilon_2$ в $t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}$. Это дает два члена, в которые ϵ_2 приходит либо из первого, либо из последнего сомножителя. В результате, получаем

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \epsilon_1^i \epsilon_2^j (t_i{}^{\alpha}{}_{\gamma} t_j{}^{\gamma}{}_{\beta} - t_j{}^{\alpha}{}_{\gamma} t_i{}^{\gamma}{}_{\beta}) + o(\epsilon^3)\,.$$

Таким образом показано, что

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \epsilon_1^i \epsilon_2^j [t_i\,, t_j]^{\alpha}{}_{\beta} + o(\epsilon^3)\,, \tag{7.15}$$

где $[a, b]$ обозначает коммутатор матриц

$$[a, b]^{\alpha}{}_{\beta} := (ab)^{\alpha}{}_{\beta} - (ba)^{\alpha}{}_{\beta}\,, \qquad (ab)^{\alpha}{}_{\beta} = a^{\alpha}{}_{\gamma} b^{\gamma}{}_{\beta}\,.$$

Поскольку элемент (7.15) находится в инфинитезимальной окрестности единицы группы он должен допускать представление (7.8). Это требует

$$[t_i, t_j] = f_{ij}^k t_k, \tag{7.16}$$

где f_{ij}^k - некоторые численные коэффициенты, называемые *структурными коэффициентами.* Структурные коэффициенты f_{ij}^k во многом определяют структуру группы Ли G.

По своему определению, коммутатор

$$[a, b] := a \circ b - b \circ a\,, \tag{7.17}$$

определенный по некоторому ассоциативному произведению $\circ$ (в нашем случае матричному), удовлетворяет важному соотношению, называемому тождеством Якоби

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0. \tag{7.18}$$

Задача 7.10. Проверить

Теперь мы можем ввести понятие алгебры Ли, имеющее фундаментальное значение в математике и физике.

Определение: Алгебра l с произведением, обозначаемым $[a, b]$ $\forall a, b \in l$, называется алгеброй Ли, если произведение антисимметрично

$$[a, b] = -[b, a] \tag{7.19}$$

и для любых $a, b, c \in l$ выполняется тождество Якоби (7.18), (которое является тождеством только если $[,]$ - коммутатор, построенный по ассоциативному произведению согласно (7.17)).

Пусть t_i - некоторый базис алгебры Ли l. Тогда должны выполняться соотношения (7.16) с некоторыми структурными коэффициентами f_{ij}^k, которые антисимметричны

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k \tag{7.20}$$

и удовлетворяют тождеству Якоби в форме

$$f_{ij}^l f_{lk}^n + f_{jk}^l f_{li}^n + f_{ki}^l f_{lj}^n = 0\,. \tag{7.21}$$

Задача 7.11. Проверить.

Представлением алгебры Ли l называется ее реализация матрицами ${t_i}^\alpha{}_\beta$ с лиевским произведением, реализованным матричным коммутатором. Модулем алгебры Ли l называется линейное пространство V , в котором элементы l действуют как линейные операторы согласно (7.8).

Важным следствием описанной конструкции является то, что всякая группа Ли G порождает алгебру Ли g, и всякий G-модуль порождает g-модуль. Идея в том, чтобы вместо групп изучать их алгебры Ли, а вместо G-модулей изучать g-модули, так как часто это проще.

Мы применим эту идею к различным симметриям, включающим группу движений $\mathbb{R}^n$ и релятивистским симметриям, что позволит нам вскоре построить спинорное представление этих симметрий.

При этом важно помнить, что, вообще говоря, алгебры Ли характеризуют порождающие их группы Ли не полностью. В частности, могут существовать разные группы Ли, обладающие одной алгеброй Ли.

Задача 7.12. Привести пример.

8 Лекция 8.
1 курс, 2 семестр 4 Апреля 2020.

8.1 Примеры алгебр Ли

8.1.1 $gl(n)$

Группа $GL(n)$ это группа невырожденных (обратимых) матриц

$$a^i{}_j\,, \qquad i,j=1,...n. \tag{8.1}$$

Элемент $g \in G$ близкий к единичному имеет вид

$$g^i{}_j = \delta^i{}_j + \varepsilon t^i{}_j, \tag{8.2}$$

где $t^i{}_j$ - любая матрица, а параметр ε бесконечно мал. Поэтому алгебра Ли $gl(n)$ - это алгебра всевозможных матриц $n \times n$ с матричным произведением (5.11) в качестве лиевского произведения.

Задача 8.1. Какова размерность $gl(n)$? Введем базис в $gl(n)$ следующим образом. $(e^a{}_b)^i{}_j$ - матрица с единственным отличным от нуля элементом, расположенном на пересечении a-й строки и b-ого столбца. Здесь a и b нумеруют разные элементы в пространстве матриц, а i и j нумеруют элементы данной матрицы при фиксированных a и b.

Задача 8.2. Убедиться, что $(e^a{}_b)^i{}_j$ образуют базис в пространстве матриц.

Матрицу $(e^a{}_b)^i{}_j$ удобно представить в виде

$$(e^a{}_b)^i{}_j = \delta^a{}_j \delta^i{}_b\,. \tag{8.3}$$

Задача 8.3. Убедиться, что в этом базисе

$$e^a{}_b e^c{}_d = \delta^a{}_d e^c{}_b \tag{8.4}$$

и, следовательно,

$$[e^a{}_b, e^c{}_d] = \delta^a{}_d e^c{}_b - \delta^c{}_b e^a{}_d. \tag{8.5}$$

Решение

Проверим эти соотношения прямой подстановкой

$$e^a{}_b e^c{}_d = (e^a{}_b)^i{}_k (e^c{}_d)^k{}_j = \delta^a_k \delta^i_b\ \delta^c_j \delta^k_d = \delta^a_k \delta^k_d\ \delta^i_b \delta^c_j = \delta^a_d (e^c{}_b)^i{}_j = \delta^a_d e^c{}_b \tag{8.6}$$

$$[e^a{}_b, e^c{}_d] \equiv e^a{}_b e^c{}_d - e^c{}_d e^a{}_b = \delta^a_d e^c{}_b - \delta^c_b e^a{}_d \tag{8.7}$$

Формула (8.5) задает определяющие соотношения алгебры Ли $gl(n)$. Ее надо помнить как таблицу умножения. Мы вывели эту формулу в тавтологическом (матричном) представлении $gl(n)$. Но у $gl(n)$ есть много других представлений. Во всех этих представлениях существует базис, в котором определяющие соотношения $gl(n)$ имеют вид (8.5).

8.1.2 Символ Леви-Чевиты, детерминант и след

В дальнейшим нам понадобится важный объект, который называется совершенно антисимметричным (псевдо)тензором или символом Леви-Чивита и обозначается $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$, где n совпадает с размерностью пространства-времени. Например, в четырехмерном случае символ Леви-Чивита ϵ^{abcd} несет четыре индекса.

По определению, ϵ^{abcd} антисимметричен относительно перестановки любой пары индексов

$$\epsilon^{\dots a \dots b \dots} = -\epsilon^{\dots b \dots a \dots} . \tag{8.8}$$

Это означает, в частности, что он равен нулю, если хотя бы одна пара индексов совпадает. Значит, $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ может быть отличен от нуля только если все индексы попарно различны. Полагая

$$\epsilon^{0\,1\,2\,\dots n-1} = 1 , \tag{8.9}$$

получаем, что для других расстановок индексов $\epsilon^{a_1 \dots a_n} = 1$ для четных подстановок индексов и $\epsilon^{a_1 \dots a_n} = -1$ - для нечетных. Таким образом, $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ реализует представления группы S_n, в котором ее четные элементы реализованы тривиально, а нечетные - умножением на -1. Замечу, что выбор знака $\epsilon^{0\,1\,2\,\dots n-1}$ является вопросом удобства.

Символ Леви-Чивита является очень важным инструментом. Например, с его помощью легко определить детерминант и доказать, что он обладает мультипликативным свойством. Пусть дана матрица A^a_b. Рассмотрим выражение

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}_{a_1} \dots A^{b_n}_{a_n} \tag{8.10}$$

Поскольку $\epsilon^{a1 \dots a_n}$ полностью антисимметричен, а элементы матрицы $A^b{}_a$ коммутативны, это выражение полностью антисимметрично по индексам b_i. Но это значит, что оно пропорционально $\epsilon^{b_1 \dots b_n}$. Назовем коэффициент пропорциональности детерминантом $\det|A|$

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{a_n} := \det|A| \epsilon^{b_1 \dots b_n} \tag{8.11}$$

и проверим, что он обладает свойством мультипликативности. Действительно, с одной стороны, по определению,

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}{}_{c_1} B^{c_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{c_n} B^{c_n}{}_{a_n} = \det|AB| \epsilon^{b_1 \dots b_n} . \tag{8.12}$$

С другой,

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}{}_{c_1} B^{c_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{c_n} B^{c_n}{}_{a_n} = \det|B| \epsilon^{c_1 \dots c_n} A^{b_1}{}_{c_1} \dots A^{b_n}{}_{c_n} = \det|B| \det|A| \epsilon^{b_1 \dots b_n} , \tag{8.13}$$

т.е.,

$$\det|AB| = \det|A| \det|B| . \tag{8.14}$$

Остается заметить, что нормировка в (8.11) выбрана так, что $\det|\delta^n_m| = 1$. Кроме того, из формулы (8.11) следует, что

$$det|A| = \frac{1}{n!} \epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n} A^{b_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{a_n} \tag{8.15}$$

($\epsilon_{b_1...b_n}$ с нижними индексами определяется аналогично $\epsilon^{b_1...b_n}$ или может быть получен из последнего путем опускания индексов при наличии метрики с единичным детерминантом).

Задача 8.4. Доказать. Убедится, что эта формула приводит к обычному определению детерминанта.

Важное следствие этого анализа состоит в том, что $\epsilon^{a_1...a_n}$ и $\epsilon_{b_1...b_n}$ являются инвариантами группы $SL(n)$.

Задача 8.5. Доказать

Найдем детерминант матрицы близкой к единичной

$$A^i{}_j = \delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j.$$

Используя определения детерминанта через символ Леви-Чивиты, получаем

$$\det\left|\delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j\right| = \epsilon_{i_1 i_2 ... i_n}(\delta^{i_1}_1 + \varepsilon t^{i_1}{}_1)(\delta^{i_2}_2 + \varepsilon t^{i_2}{}_2)...(\delta^{i_n}_n + \varepsilon t^{i_n}{}_n)_n\Big) + o(\varepsilon^2)\,, \tag{8.16}$$

т.е. произведение диагональных элементов. Очевидно, это дает важный результат

$$\det\left|\delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j\right| = 1 + \varepsilon t^k{}_k + O(\varepsilon^2)\,. \tag{8.17}$$

Определение: Следом матрицы $t^n{}_n$ называется величина

$$\mathrm{tr}(t) := t^i{}_i \tag{8.18}$$

Задача 8.6. Доказать Лемму: коммутатор $[a, b]$ имеет нулевой след для любых матриц a и b

$$\mathrm{tr}([a, b]) = 0. \tag{8.19}$$

Решение

След от произведения двух матриц в индексных обозначениях имеет вид

$$\mathrm{tr}(ab) = a^i{}_j b^j{}_i. \tag{8.20}$$

Исходя из определения, видно, что

$$\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba). \tag{8.21}$$

Следовательно, след от коммутатора двух матриц равен нулю

$$\mathrm{tr}\,([a, b]) = \mathrm{tr}\,(ab - ba) = \mathrm{tr}(ab) - \mathrm{tr}(ba) = \mathrm{tr}(ab) - \mathrm{tr}(ab) = 0\,. \tag{8.22}$$

Так же очевидна линейность следа, т.е.

$$\mathrm{tr}(c + d) = c^i{}_i + d^i{}_i. \tag{8.23}$$

С более общей точки зрения соотношение (8.19) служит определением следа для произвольной ассоциативной алгебры: следом $\mathrm{tr}(a)$ ассоциативной алгебры A называется любое линейное отображение $A \to \mathbb{K}$ в поле, над которым построена A, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{tr}(a \circ b) = \mathrm{tr}(b \circ a)\,, \qquad \forall a, b \in A. \tag{8.24}$$

8.1.3 $sl(n)$

$SL(n)$ - это группа матриц с единичным детерминантом. Детерминант единичной матрицы равен единице. Из (8.17) вытекает, что алгебра Ли $sl(n)$ это алгебра коммутаторов матриц с нулевым следом

$$\mathrm{tr}(t) := t^i{}_i = 0. \tag{8.25}$$

Задача 8.7. С помощью Леммы (8.19) убедиться, что матрицы с нулевым следом образуют алгебру Ли.

8.1.4 $o(n)$

В определяющих соотношениях ортогональной группы

$$A^i{}_k A^j{}_l \delta_{ij} = \delta_{kl} \tag{8.26}$$

положим

$$A^i{}_j = \delta^i{}_j + \varepsilon t^i{}_j. \tag{8.27}$$

В линейном по ε приближении это дает условия

$$\delta_{ij} t^i{}_k \delta^j{}_l + \delta_{ij} \delta^i{}_k t^j{}_l = 0, \tag{8.28}$$

что эквивалентно

$$\delta_{il} t^i{}_k + \delta_{jk} t^j{}_l = 0. \tag{8.29}$$

Вводя обозначение

$$t_{lk} := \delta_{il} t^i{}_k \tag{8.30}$$

получаем условие

$$t_{lk} + t_{kl} = 0. \tag{8.31}$$

Это означает, что алгебра Ли $o(n)$ описывается антисимметричными матрицами

$$t_{ij} = -t_{ji}. \tag{8.32}$$

Задача 8.8. Убедиться, что коммутатор антисимметричных матриц дает антисимметричную матрицу, т.е. $o(n)$ действительно алгебра Ли.

В качестве базиса $o(n)$ можно выбрать антисимметричные матрицы

$$t_{ab} := \delta_{ac} e^c{}_b - \delta_{bc} e^c{}_a. \tag{8.33}$$

Задача 8.9. Найти определяющие соотношения алгебры Ли $o(n)$

С помощью (8.5) легко убедиться, что

$$[t_{ab}, t_{cd}] = -\delta_{bc} t_{ad} + \delta_{ac} t_{bd} + \delta_{bd} t_{ac} - \delta_{ad} t_{bc}. \tag{8.34}$$

8.1.5 $sp(2n)$

Симплектическая группа $SP(2n)$ определяется соотношениями похожими на (8.33) с заменой симметричной метрики δ_{ij} на антисимметричную невырожденную форму $C_{ij} = -C_{ji}$

$$A^i{}_k A^j{}_l C_{ij} = C_{kl}. \tag{8.35}$$

Задача 8.10. Вычислить размерность $SP(2n)$

Задача 8.11. Найти матричную реализацию алгебры Ли $sp(2n)$

Алгебры $sl(n)$, $o(n)$, $sp(2n)$ исчерпывают четыре бесконечные серии классических простых алгебр по классификации Картана (над комплексным полем). При этом алгебры $o(n)$ при четных и нечетных n различаются. Кроме этих алгебр есть еще пять исключительных алгебр Ли g_2, f_4, e_6, e_7, e_8.

Задача 8.12. Убедиться, что алгебра $gl(n)$ не простая.

8.1.6 Вещественные алгебры

Классификация алгебр Ли над вещественным полем более сложна. Так вместо (8.35) можно написать

$$A^i{}_k A^j{}_l \eta_{ij} = \eta_{kl}. \tag{8.36}$$

где η_{ij} произвольная невырожденная симметричная матрица (форма). Переходя от η_{kl} к

$$\eta'_{ij} = U_i^k U_j^l \eta_{kl}, \tag{8.37}$$

мы лишь меняем базис в пространстве, где действуют повороты. Это значит, что уравнения (8.36) с η_{kl} и η'_{kl}, связанными (8.37), описывают одну и ту же алгебру Ли. Из курса линейной алгебры известно, что классы эквивалентности по отношению к преобразованию (8.37) определяются индексом инерции, равным разности числа положительных и отрицательных собственных значений. Иными словами, в качестве представителей разных классов эквивалентности можно взять

$$\eta_{ij} = \delta_{ij}\,, \qquad i,j = 1,\ldots,p \tag{8.38}$$

$$\eta_{ij} = -\delta_{ij}\,, \qquad i,j = p+1,\ldots,p+q, \tag{8.39}$$

и $\eta_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Матрицы $A^i{}_j$, удовлетворяющие (8.36), образуют псевдоортогональную группу $O(p,q)$. Соответствующая алгебра Ли обозначается $so(p,q)$.

Задача 8.13. Доказать, что $so(p,q) = so(q,p)$

Задача 8.14. Найти структурные соотношения $so(p,q)$

Определение: Алгебра l_r называется *вещественной формой* комплексной алгебры l_c, если последняя получается из l_r в результате замены поля вещественных чисел на поле комплексных чисел. Алгебры $so(p,q)$ (с $q > p$) задают различные вещественные формы комплексной алгебры $o(p+q|C)$.

Задача 8.15. Доказать

Аналогично, различные вещественные формы $sl(n|C)$ обозначаются $sl(n|R)$ и $su(p,q)$ $(p+q=n)$. $sp(2n|C)$ также допускает различные вещественные формы.

8.2 Симметрии специальной теории относительности

Специальная теория относительности была построена в 1905 году как результат разрешения парадокса теории электромагнетизма Максвелла, построенной в середине 19 века и предсказывавшей, что скорость распространения света не зависит от системы отсчета. На это ушло много усилий лучших умов своего времени таких как Эйнштейн, Лоренц, Пуанкаре и другие. С современной точки зрения кажется удивительным, что это заняло так много времени. Во многом причина в том, что не был развит необходимый математический аппарат, связанный в первую очередь с теорией групп. Сейчас мы попробуем в этом убедиться.

Итак, световой сигнал распространяется по закону

$$x^i = x_0^i + tv^i, \quad v^i v^j \delta_{ij} = c^2, \tag{8.40}$$

где c скорость света, которая является мировой константой. Размерность c есть cm/sec. Бывает удобно выбрать систему единиц, в которой $c=1$, что означает, что и расстояние и время измеряется одними единицами.

Задача 8.16. 6.9. Чему равна единица времени $1cm$?

После этого время и пространственные координаты становятся настолько похожими, что их удобно рассматривать как единый 4-вектор

$$x^a := (x^0, x^i)\,, \qquad x^0 := t\,, \qquad a = 0,1,2,3\,, \qquad i = 1,2,3. \tag{8.41}$$

x^a удобно понимать как координаты единого пространства-времени, называемого пространством Минковского. Из формулы (8.40) следует, что интервал между точками x^a и x_0^a

$$s^2 := (x_0 - x_0^0)^2 - (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)\delta_{ij} \tag{8.42}$$

не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой. Строго говоря, это не совсем так, поскольку анализ распространения света говорит лишь, что если интервал равнялся нулю в одной системе отсчета - он будет равняться нулю и в любой другой. Например, интервал мог бы умножаться на число при переходе от одной системе к другой, т.е. отличаться на конформное преобразование. Но минимальная симметрия, совместимая с независимостью закона распространения света от системы отсчета, требует инвариантности интервала. Групповой смысл специальной теории относительности сильно упрощается, если ввести метрику Минковского η_{ab} с ненулевыми компонентами

$$\eta_{00} = 1\,, \qquad \eta_{ij} = -\delta_{ij}. \tag{8.43}$$

Теперь интервал между точками пространства Минковского с координатами y^a и x^a приобретает простой вид

$$s^2 = \eta_{ab}(x^a - y^a)(x^b - y^b) \tag{8.44}$$

Преобразования СТО есть ни что иное как движения пространства-времени Минковского. Группа движений пространства Минковского называется группой Пуанкаре и обозначается $ISO(1,3)$. Она включает группу Лоренца псевдоортогональных преобразований $O(1,3)$ координат x^a и группу пространственно-временных трансляций

$$x'^a = A^a{}_b x^b + a^a \,, \qquad \eta_{ac} A^a_b A^c_d = \eta_{bd}. \tag{8.45}$$

Здесь $A^a{}_b$ описывает преобразования Лоренца, а a^a пространственно-временные трансляции.

Задача 8.17. Каковы размерности группы Лоренца и группы Пуанкаре?

Задача 8.18. Найти нормальный делитель группы Пуанкаре

Группа Лоренца содержит обычные пространственные вращения и отражения, а также бусты - преобразования перехода от одной системы отсчета к другой. Явный вид бустов найти не сложнее, чем на лекции 4 мы вывели формулы преобразований при поворотах.

Рассмотрим случай, когда одна система движется относительно другой вдоль оси x_1. В этом случае матрица отличается от единичной только в компонентах $A^a{}_b$ где $a,b = 0,1$. Условие (8.45) дает три условия

$$(A^0{}_0)^2 - (A^1{}_0)^2 = 1\,, \tag{8.46}$$

$$(A^1{}_1)^2 - (A^0{}_1)^2 = 1\,, \tag{8.47}$$

$$(A^0{}_0)(A^0{}_1) - (A^1{}_0)(A^1{}_1) = 0. \tag{8.48}$$

Первые два соотношения решаются аналогично случаю группы вращений, разобранному в Лекции 4,

$$A^0{}_0 = acosh(\phi_1), A^1{}_0 = sh(\phi_1), a^2 = 1\,, \tag{8.49}$$

$$A^1{}_1 = bcosh(\phi_2)\,, \qquad A^0{}_1 = sh(\phi_2), b^2 = 1. \tag{8.50}$$

Здесь знаки $a = -1$ и $b = -1$ в первом и втором соотношениях отвечают отражениям времени и пространства, соответственно. Рассмотрим случай $a = b = 1$.

Тогда третье соотношение дает

$$cosh(\phi_1)sh(\phi_2) - cosh(\phi_2)sh(\phi_1) = 2sh(\phi_2 - \phi_1) = 0 \tag{8.51}$$

откуда следует $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Это дает

$$x'^0 = cosh(\phi)x^0 + sh(\phi)x^1, \tag{8.52}$$

$$x'^1 = cosh(\phi)x^1 + sh(\phi)x^0\,. \tag{8.53}$$

Из второго соотношения следует, что скорость движения начала координат штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной

$$v = \frac{sh(\phi)}{cosh(\phi)}. \tag{8.54}$$

Заметим, что $|v|$ всегда меньше единицы, т.е. скорость движения одной системы относительно другой не может превышать скорость света.

Задача 8.19. Показать, что

$$cosh(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad sh(\phi) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,. \tag{8.55}$$

Подстановка этих выражений в (8.52) и (8.53) дает обычные преобразования Лоренца при переходе от одной системы отсчета к другой. В нерелятивистской механике динамика материальной точки характеризуется энергией и импульсом. Релятивистское обобщение дается четыре-вектором импульса P^a, который определяется следующим образом:

$$P^a := m\frac{dx^a}{ds}\ , \qquad ds := pdx^a dx^b \eta_{ab} = dt\sqrt{1-v^2}. \tag{8.56}$$

В результате,

$$P^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad P^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{8.57}$$

Поскольку P^a преобразуется как вектор, $P^a P^b \eta_{ab}$ является инвариантом группы Лоренца, т.е. не зависит от выбора системы отсчета. Значит

$$P^a P^b \eta_{ab} = m^2\,. \tag{8.58}$$

Задача 8.20. Доказать

Разлагая P^0, отождествляемое с энергией, с точностью до второго порядка получаем

$$P^0 = m + \frac{mv^2}{2} + o(v^3)\,. \tag{8.59}$$

Учитывая, что $c = 1$ эта формула и означает, что $E = mc^2$ в системе покоя. Замечу, что первая поправка в точности совпадает с нерелятивистской кинетической энергией. В нерелятивизме энергия не смешивается с импульсом и поэтому определена с точностью до константы. В СТО это уже не так, так как энергия является компонентой 4-вектора.

9 Лекция 9
1 курс, 2 семестр, 9 Апреля 2020 (on-line).

9.1 Релятивистские симметрии - продолжение

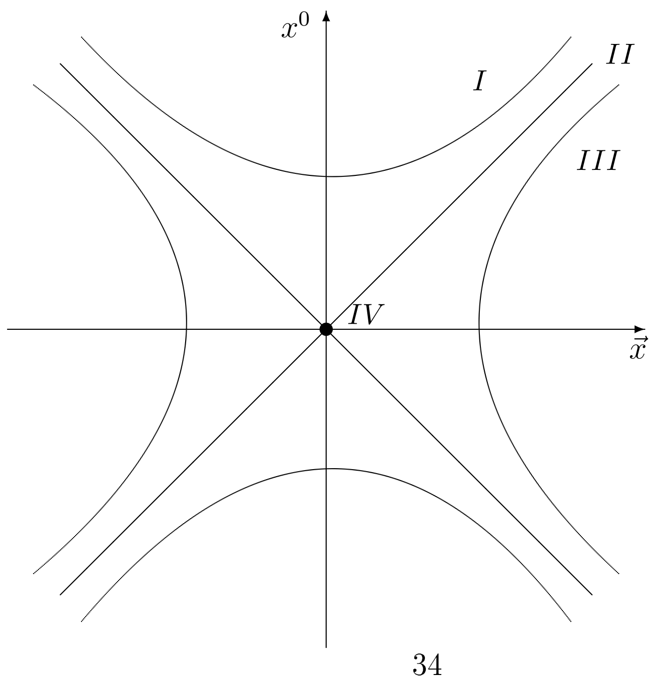
Группа Пуанкаре содержит столько же независимых параметров, сколько и группа Галилея: 3 вращения, 3 буста, 3 пространственных сдвига и один временной. Но действие группы Пуанкаре отличается от действия группы Галилея. Математически, группа Пуанкаре является *деформацией* группы Галилея. Наоборот, группа Галилея является *сжатием* группы Пуанкаре. Параметром деформации является обратная скорость света c^{-1}. Инвариантом преобразований из группы Пуанкаре является интервал

$$s^2 = \eta_{ab}(x^a - y^a)(x^b - y^b)\,. \tag{9.1}$$

Аналогично тому, как в случае эвклидового пространства орбитами группы вращений являются сферы, в СТО орбитами группы Лоренца являются поверхности постоянного s^2. Однако, в отличие от эвклидового случая, в СТО существует три типа орбит:

- $s^2 > 0$: времени-подобный интервал
- $s^2 = 0$: свето-подобный интервал
- $s^2 < 0$: пространственно-подобный интервал

Названия связаны с тем, что $s^2 > 0$ для событий, происшедших в разные моменты времени в одной точке пространства и $s^2 < 0$ для событий, происшедших в один момент времени в разных точках пространства. Разные орбиты группы Лоренца имеют вид



При размерности пространства-времени $d > 2$ все орбиты являются поверхностями вращения. Строго говоря, имеется еще одна вырожденная орбита группы Лоренца, состоящая из одной точки - начала координат.

Группа Лоренца $O(3,1)$ содержит в качестве подгруппы $SO(3,1)$ и ортохронную группу Лоренца $SO_{\uparrow}(3,1)$,

$$SO_{\uparrow}(3,1) \subset SO(3,1) \subset O(3,1). \tag{9.2}$$

Ортохронная группа Лоренца $SO_{\uparrow}(3,1)$ не меняет направление времени, что выражается условием

$$A^0{}_0 \geq 1\,. \tag{9.3}$$

Задача 9.1. Доказать, что это условие сохраняется при групповом умножении. Убедиться, что выбор коэффициентов $a = b = 1$ в (8.24) означал, что рассматривался элемент $SO_{\uparrow}(3,1)$.

Важнейшее отличие специальной теории относительности от нерелятивистской состоит в том, что скорость света является максимальной скоростью передачи сигналов. Причинно связанные области по отношению к началу координат находятся внутри конуса, состоящего из конуса будущего и конуса прошлого (включая границу). Область вне конуса причинно не связана с началом координат, т.е. передать сигнал в эту область из начала координат невозможно.

Отсюда вытекает важное следствие: сигналы могут передаваться только полями, распространяющимися не быстрее скорости света. Абсолютно жестких тел (палок) в СТО существовать не может. Механизм взаимодействия состоит в том, что некоторый объект A излучает поле, это поле распространяется, доходит до другого объекта B и влияет на него. Последовательное развитие этой идеи приводит к тому, что все объекты это поля.

9.2 Скалярное поле и уравнение Клейна-Гордона-Фока

Поле - это функция от точек (координат) пространства-времени x^a. Простейшим и одновременно важным примером поля является скалярное поле $\phi(x)$. В частности, скалярным полем является поле Хиггса. Смысл термина скалярное поле не столько в том, что поле $\phi(x)$ имеет одну компоненту, сколько в законе проеобразования под действием $g \in ISO(3,1)$

$$x'^a := g(x)^a\,, \qquad x'^a = A^a{}_b x^b + a^a\,. \tag{9.4}$$

Пусть $\phi'(x)$ результат действия g на $\phi(x)$. Закон преобразования скалярного поля задается условием, что преобразованное поле в преобразованной точке равно исходному полю в исходной точке, т.е.

$$\phi'(x') = \phi(x)\,. \tag{9.5}$$

Это эквивалентно закону преобразования

$$\phi'(x) = \phi(g^{-1}(x))\,. \tag{9.6}$$

Функции $\phi(x)$ образуют линейное пространство Φ, так как их можно складывать и умножать на числа. Пространство Φ бесконечномерно. Очевидно, преобразование (9.6) является линейным.

Задача 9.2. Проверить

Решение

$$\phi(x) = \phi(x(x'))$$

$$x'(x) = g(x) \implies x(x') = g^{-1}(x').$$

В результате, преобразование (9.6) задает представление группы Пуанкаре.

Задача 9.3. Доказать и объяснить почему формула (9.6) содержит g^{-1} в аргументе $\phi(x)$.

Решение

$$g_1(\phi(x)) = \phi(g_1^{-1}(x)), \quad g_2(\phi(x)) = \phi(g_2^{-1}(x)).$$

$$g_2 \circ g_1(\phi(x)) = g_2(\phi(g_1^{-1}(x))) = \phi(g_1^{-1}(g_2^{-1}(x))) = \phi((g_2 \circ g_1)^{-1}(x)).$$

Это представление бесконечномерно. Можно сказать, что Φ образует Пуанкаре-модуль.

Приводим ли этот модуль? Сейчас мы убедимся, что да, поскольку на ϕ оказывается возможным наложить релятивистски инвариантные условия (уравнения) которые выделяют инвариантные подпространства - пространства решений релятивистских уравнений.

Чтобы это сделать введем 4-вектор производной

$$\frac{\partial}{\partial x^a} =: \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \qquad a = 0, 1, ...d-1\,. \tag{9.7}$$

В нашем пространстве-времени $d = 4$.

Частная производная

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{9.8}$$

понимается как обычная производная по координате x^a с фиксированным номером a и неизменными остальными координатами x^b с $b \neq a$. Для упрощения записи мы будем использовать обозначение

$$\partial_a := \frac{\partial}{\partial x^a}\,.$$

В этих терминах правила дифференцирования определяются соотношением

$$\partial_b(x^a) = \delta_b^a\,. \tag{9.9}$$

Фундаментальное уравнение Клейна-Гордона-Фока имеет вид

$$\Box\phi(x) + m^2\phi(x) = 0\,, \tag{9.10}$$

где *оператор Д'Аламбера* определяется следующим образом

$$\Box := \eta^{ab}\partial_a\partial_b\,. \tag{9.11}$$

По отношению к лоренцевым поворотам оператор Д'Аламбера также инвариантен

$$\eta^{ab}\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b} = \eta^{ab}\frac{\partial}{\partial x'^a}\frac{\partial}{\partial x'^b}\,. \tag{9.12}$$

Действительно, из соотношения (9.9) следует, что, если $x'^a = A^a{}_b x^b$, то ∂_a преобразуется с помощью обратной матрицы

$$\partial'{}_a = A^{-1b}{}_a\partial_b$$

Задача 9.4. Убедится

Но поскольку матрица обратная к (псевдо)ортогональной также (псевдо)ортогональна, она оставляет инвариантной метрику Минковского η^{ab}, что влечет за собой (9.12).

Замечу, что, как вам будет показано в курсе анализа, при общем переходе от одних координат к другим

$$x'^a = x'^a(x)$$

производные преобразуются следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial x'^b(x)}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x'^b}$$

Задача 9.5. Убедиться, используя определение производных через предел малых приращений .

Решение

Рассмотрим производную от скалярной функции

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\phi(x).$$

Согласно определению скаляра, это тоже самое, что

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\phi(x) = \frac{\partial}{\partial x^a}\phi'(x') = \frac{\partial}{\partial x^a}\phi'(x'(x)) = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a}\frac{\partial\phi'(x'(x))}{\partial x'^b}.$$

В итоге имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial x'^b(x)}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x'^b}.$$

Инвариантность уравнения КГФ означает, что преобразования из группы Пуанкаре переводят любое его решение в некоторое другое решение. Здесь используется то, что пространство решений линейных уравнений образует линейное пространство, т.е. линейная комбинация любых двух решений также является решением. Это означает, что пространство решений уравнения КГФ образует инвариантное подпространство

$\Phi_m \subset \Phi$, т.е. Пуанкаре-модуль приводим. Более того, он бесконечно приводим, так как инвариантное подпространство Φ_m отвечает любому выбору параметра m^2 и подпространства Φ_m с разными m^2 не пересекаются.

Задача 9.6. Доказать

Решение

Пусть $\phi_1 \in \Phi_{m_1}$ и $\phi_2 \in \Phi_{m_2}$, т.е.

$$\Box\phi_1(x) + m_1^2\phi_1(x) = 0, \tag{9.13}$$

$$\Box\phi_2(x) + m_2^2\phi_2(x) = 0. \tag{9.14}$$

Подставим Функцию из Φ_{m_1} в уравнение на Φ_{m_2}

$$\Box\phi_1(x) + m_2^2\phi_1(x) = -m_1^2\phi_1(x) + m_2^2\phi_1(x) = \left(m_2^2 - m_1^2\right)\phi_1(x) \neq 0. \tag{9.15}$$

10 Лекция 10. 1 курс, 2 семестр, 16 Апреля 2020 (on-line)

10.1 Волновая интерпретация

Рассмотрим решения уравнения КГФ, начав с безмассового случая $m^2 = 0$. Рассмотрим плоское решение $\phi(x^0, x^1)$, не зависящее от координат x^2 и x^3. Это означает, что в каждый момент времени x^0 и при каждом x^1, решение является константой в ортогональной плоскости (x^2, x^3). Для таких решений уравнение (9.10) приобретает вид

$$\Big(\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}\Big)\phi(x^0, x^1) = 0\,. \tag{10.1}$$

Как решать такое уравнение? Полезно использовать формулу Эйлера

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \tag{10.2}$$

переписав уравнение в виде

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^1}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\Big)\phi(x^0, x^1) = 0\,. \tag{10.3}$$

Здесь используется фундаментальное свойство коммутативности производных

$$\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a\,. \tag{10.4}$$

Задача 10.1. Убедиться на полиномах.

Очевидно, в такой форме уравнение КГФ допускает решение вида

$$\phi(x^0, x^1) = \phi^L(x^0 + x^1) + \phi^R(x^0 - x^1)\,, \tag{10.5}$$

где $\phi^L(x)$ и $\phi^R(x)$ - произвольные функции одной переменной.

Задача 10.2. Убедиться.

Решение

Чтобы последнее было очевидно полезно перейти к новым координатам

$$x^+ = x^0 + x^1, \quad x^- = x^0 - x^1.$$

В этих координатах уравнение КГФ для функции, не зависящей от x^2 и x^3, имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^+ \partial x^-}\phi(x^0, x^1) = 0.$$

Соответственно, формула (10.5) приобретает вид

$$\phi(x^0, x^1) = \phi^L(x^+) + \phi^R(x^-)\,.$$

Оказывается, что эта формула задает общее решение уравнения (10.1), т.е. любое его решение может быть представлено в таком виде.

Рассмотрим решение $\phi^R(x^0 - x^1)$ с некоторым профилем $\phi^R(x)$. Так как при $x^0 \to x^0 + \Delta$ и $x^1 \to x^1 + \Delta$, $\phi^R(x^0 - x^1)$ не меняется, оно описывает движение этого профиля направо.

Какова скорость этого движения? Очевидно, $v = c = 1$, т.е. движение происходит со скоростью света. Забегая вперед, замечу, что это не случайно, так как электромагнитное поле, т.е. свет, также удовлетворяет уравнению КГФ.

Аналогично, $\phi^L(x^0 + x^1)$ описывает движение налево. В 1+1 мерном пространстве-времени есть только две возможности: движение налево и направо. В пространстве более высокой размерности d $>$ 2 плоские волны могут двигаться в любую сторону. И хотя не все решения являются плоскими волнами, все они могут быть представлены как комбинации плоских волн.

Рассмотрим решение вида

$$\phi(x) = \exp i p_a x^a = \exp i(p_0 x^0 + p_1 x^1 + \ldots)\,, \tag{10.6}$$

где p_a- числа. Напомню, что

$$\exp i\varphi = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Поскольку

$$\partial_a \exp i p_a x^a = i p_a \exp i p_a x^a\,, \tag{10.7}$$

получаем

$$\Box \exp i p_a x^a = -p_c p_b \eta^{cb} \exp i p_a x^a\,. \tag{10.8}$$

Таким образом, уравнение КГФ с массой m решается, если

$$p_a p_b \eta^{ab} = m^2 \tag{10.9}$$

или, эквивалентно,

$$p_0^2 = m^2 + \sum_n p_n^2\,, \qquad n = 1, 2, 3\,. \tag{10.10}$$

Как станет ясно позднее, эта формула снова выражает формулу Эйнштейна $E = mc^2$.

Очевидно, $\nu := \frac{p_0}{2\pi}$ - частота колебаний в (любой) точке x. Чем больше p_0 - тем выше частота колебаний.

$\vec{p}_n$ - волновой вектор - вектор в пространстве. У $\vec{p}_n$ есть направление и длина. Пусть $\vec{p}_n$ смотрит в направлении 1, т.е.

$$p_1 = p\,, \qquad p_2 = p_3 = 0\,. \tag{10.11}$$

Тогда решение имеет вид

$$\exp i(p_0 x^0 + p x^1) \tag{10.12}$$

и имеет период $\frac{2\pi}{p}$ по направлению x^1. Таким образом, это решение описывает волну, бегущую налево по направлению x^1. Поэтому уравнение КГФ часто называется волновым.

Уравнение (10.10) имеет два решения

$$p_0 = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}\,. \tag{10.13}$$

При $m = 0$, $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2}$ в соответствии с нашим анализом безмассового случая. При $m \neq 0$, p_0 и p не пропорциональны.

Две ветви решений с $p_0 > 0$ и $p_0 < 0$, называются, соответственно, положительно-частотными и отрицательно-частотными. Эти решения комплексно сопряжены. Если поле $\phi_(x)$ вещественно, то они оба обязаны присутствовать

$$\phi(x) = f_+(\vec{p}) + f_-(-\vec{p})\,. \tag{10.14}$$

В квантовой теории поля $f_\pm(p)$ становятся операторами: f_+ - оператор рождения частиц, а f_- - оператор уничтожения. Процедура квантования различает положительно- и отрицательно-частотные решения. Это разделение является общим и служит одним из основных постулатов квантования релятивистских полей. В классической теории обе ветви равноправны.

p_a оказывается 4-импульсом. $p_0 = h\nu = \hbar\omega$ - энергия. $p = h\lambda$ - импульс. h -постоянная Планка

$$h = 2\pi\hbar\,, \qquad \hbar = 1.05410^{-27} erg\, sec\,. \tag{10.15}$$

Уравнение КГФ описывает свободные частицы на подлете к зоне взаимодействия. Взаимодействия описываются нелинейными поправками к уравнениям. Например, для скалярного поля такие поправки могут иметь вид

$$\Box\phi + m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0\,. \tag{10.16}$$

Поэтому задача теории поля и квантовой теории поля состоит из двух:

Описание возможных типов частиц.

Описание их возможных взаимодействий.

Эта последняя задача оказывается в высшей степени нетривиальной и интересной.

Начнем с более простой первой задачи, которая решается с помощью группового анализа релятивистских симметрий.

10.2 Групповая интерпретация

Мы убедились, что уравнение КГФ релятивистски инвариантно. Это значит, что преобразования из группы Пуанкаре (9.4), действующие по формуле (9.6), переводят решения в решения. Иными словами, решения уравнения КГФ образуют $ISO(3,1)$-модуль. Если ограничиться ортохронной подгруппой $ISO_\uparrow(3,1) \subset ISO(3,1)$, не изменяющей направление стрелы времени, положительно- и отрицательно-частотные решения образуют ее подмодули $V_m^\pm$.

Задача 10.3. Убедиться

Решение

В прошлой лекции уже было показано, что преобразования группы Пуанкаре переводят одно решение уравнения КГФ в другое решение с той же массой. Нужно убедится, что если решение было плоской волной, то после преобразований из $ISO_{\uparrow}(3,1)$ оно останется плоской волной (10.12). При трансляциях решение умножается на комплексное число:

$$x'^a = x^a + v^a \implies \exp\{ip_a x'^a\} = \exp\{ip_a x^a\}\exp\{ip_a v^a\} = A\exp\{ip_a x^a\}.$$

Преобразования Лоренца действуют на импульс как на 4-вектор:

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b \implies \exp\{ip_a \Lambda^a{}_b x^b\} = \exp\{i\,(p_a \Lambda^a{}_b)\,x^b\} = \exp\{ip'_a x^a\}\,,$$

переводя одно плосковолновое решение в другое.

Пуанкаре-модули, отвечающие решениям уравнений КГФ, неприводимы. Фактически, это следует из того фундаментального факта, являющегося следствием теории Фурье, что любое (хорошее) решение уравнения КГФ может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн

$$\phi(x) = \int d^3\vec{p}(\phi_+(\vec{p})\exp ip_a x^a + \phi_-(\vec{p})\exp -ip_a x^a)\,, \qquad p_0 = \sqrt{m^2+\vec{p}^2}\,.$$

Задача 10.4. Доказать неприводимость соответствующих Пуанкаре-модулей.

Решение

Очевидно, что трансляции не могут повлиять на «частотность» ветвей. Поскольку рассматриваются только ортохронные преобразования, то знак выражения $p_0 x^0$ в экспоненте не изменится, следовательно, с ипользованием результата предыдущей задачи, модули $V_m^{\pm}$ инвариантны относительно действия группы Пуанкаре. Поскольку действием группы Лоренца можно перевести любой вектор p_n с $p_0 > 0$, $p^2 = m^2 \geq 0$ в любой другой, удовлетворяющий этим ограничениям, это доказывает неприводимость $V_m^{\pm}$.

В разложении Фурье, элементарные проские волны образуют нечто вроде базиса бесконечномерных пространств $V_m^{\pm}$.

Зная как действуют на скалярное поле преобразования из группы Пуанкаре нетрудно получить закон действия алгебры Ли группы Пуанкаре. Для этого в формулы (9.4) и (9.6) подставим преобразования группы Пуанкаре с бесконечно малыми параметрами

$$x'_a = x_a + \omega^a{}_b x^b - \epsilon_a\,, \qquad \omega_{ab} = -\omega_{ba}\,. \tag{10.17}$$

Здесь ω_{ab}[1] задает бесконечно малый лоренцев поворот, а ϵ_a - бесконечно малый сдвиг (знаки выбраны для будущего удобства). Соответствующее инфинитезимальное преобразование скалярного поля дает

$$\phi'(x) = \phi(x^a - \omega^a{}_b x^b + \epsilon^a) = \phi(x^a) + \epsilon^b \partial_b \phi(x^a) - \omega^b{}_c x^c \partial_b \phi(x^a) + \dots\,, \tag{10.18}$$

[1] Антисимметричность ω_{ab} следует из антисимметрии генераторов, которая была показана в 8.1.4

где многоточие обозначает несущественные для дальнейшего члены более высоких степеней по ω_{ab} и ϵ_a. Вспоминая определение генераторов алгебры Ли как коэффициентов при соответствующих инфинитезимальных параметрах

$$g = I + \epsilon^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} L_{ab} \,, \tag{10.19}$$

получаем генераторы трансляций P_a и лоренцевых преобразований L_{ab} в виде

$$P_a = \partial_a \,, \qquad L_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a \,. \tag{10.20}$$

Задача 10.5. Убедиться, что алгебра Ли группы Пуанкаре имеет вид

$$[P_a, P_b] = 0 \tag{10.21}$$

$$[L_{ab}, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b \tag{10.22}$$

$$[L_{ab}, L_{cd}] = (\eta_{bc} L_{ad} - \eta_{ac} L_{bd} - \eta_{bd} L_{ac} + \eta_{ad} L_{bc}) \tag{10.23}$$

Комментарий

Операторные равенства выше нужно понимать в следующем смысле

$$[P_a, P_b]\phi(x) = (\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a)\phi(x) = 0\,\phi(x) \,, \tag{10.24}$$

т.е. как будто операторы действуют на некоторую пробную функцию.

Задача 10.6. Проверить, что трансляции образуют идеал алгебры Ли группы Пуанкаре.

Фундаментальные соотношения (10.21),(10.22), (10.23) определяют большую часть физического содержания СТО. Важно, что хотя мы их вывели в определенном представлении, определяющие соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре не зависят от представления. Поэтому задача о классификации различных релятивистских систем фактически сводится к задаче классификации Пуанкаре-модулей. Начнем постепенно двигаться в эту сторону.

Прежде всего заметим, что гармонические плоские волны характерны тем, что они образуют собственные вектора оператора импульса

$$P_a \phi_p(x) = i p_a \phi_p(x) \,, \qquad \phi_p(x) := \exp\, i\, p_a x^a \,. \tag{10.25}$$

Замечу, что в квантовой механике обычно используют другую нормировку оператора импульса

$$P_a \to i P_a$$

чтобы его собственные значения были вещественными. Я не буду этого делать, чтобы не вводить мнимую единицу в определяющие соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре.

Задача 10.7. Почему операторы импульса можно диагонализовать одновременно?

Чтобы продвинуться дальше, нам понадобится важное понятие *универсальной обертывающей* алгебры Ли.

10.3 Универсальная обертывающая алгебра и операторы Казимира

Пусть l - алгебра Ли с определяющими соотношениями

$$[t_i\,, t_j] = f_{ij}^k t_k\,. \tag{10.26}$$

Универсальная обертывающая алгебра $U(l)$ определяется как фактор ассоциативной алгебры, свободно порожденной образующими t_i, отфакторизованной по отношению эквивалентности (10.26), где $[\,,]$ теперь понимается как коммутатор в $U(l)$.

Простыми словами, $U(l)$ - это ассоциативная алгебра всевозможных произведений

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{i_1,i_2,\dots,i_n} t_{i_1} \circ t_{i_2} \circ \ldots \circ t_{i_n} \tag{10.27}$$

элементов t_i, удовлетворяющих соотношениям

$$t_i \circ t_j - t_j \circ t_i = f_{ij}^k t_k\,. \tag{10.28}$$

Задача 10.8. Убедиться, что соотношения (10.28) позволяют выбрать базис в $U(l)$ с полностью симметричными коэффициентами $A^{i_1,i_2,\dots,i_n}$.

Решение

Пусть коэффициент разложения антисимметричен по индексам i_1 и i_2, тогда соответствующий моном из суммы можно представить в виде

$$A^{i_1 i_2 \dots i_n}\, t_{i_1} \circ t_{i_2} \circ \dots \circ t_{i_n} = \frac{1}{2} A^{i_1 i_2 \dots i_n} \left(t_{i_1} \circ t_{i_2} - t_{i_2} \circ t_{i_1}\right) \circ \dots \circ t_{i_n} =$$
$$= \frac{1}{2} A^{i_1 i_2 \dots i_n} f_{i_1 i_2}^k t_k \circ \dots \circ t_{i_n} = \widetilde{A}^{k i_3 \dots i_n} t_k \circ t_{i_3} \circ \dots \circ t_{i_n}.$$

Аналогично, с помощью (10.28) может быть устранена любая антисимметричность коэффициентов разложения $A^{i_1 i_2 \dots i_n}$.

Определение: *Центром алгебры* $C \subset A$ называется такая совокупность элементов $c_\alpha \in A$, что

$$c_\alpha \circ a = a \circ c_\alpha \qquad \forall a \in A\,. \tag{10.29}$$

Элементы центра универсальной обертывающей алгебры $U(l)$ называются операторами Казимира алгебры Ли l.

Универсальная обертывающая алгебры Ли группы Пуанкаре - это ассоциативная алгебра функций от P_a и l_{ab}.

Задача 10.9. Убедиться, что оператор

$$c_2 := P_a P_b \eta^{ab} \tag{10.30}$$

является оператором Казимира в алгебре Ли группы Пуанкаре.

Поскольку он квадратичен по элементам $iso(3,1)$, c_2 называется *квадратичным оператором Казимира.* На этом языке уравнение КГФ приобретает вид

$$c_2\phi + m^2\phi = 0\,. \tag{10.31}$$

Чтобы оценить важность этой интерпретации нужно применить *лемму Шура*, которая гласит, что в (унитарном) неприводимом представлении алгебры Ли l все ее операторы Казимира кратны единичному.

Отсюда следует, в частности, что уравнение КГФ с той или иной массой должно выполняться не только для скалярного поля, с которого мы начали, но и для любых других полей, описывающих элементарные (неразложимые) частицы. В частности, оно выполняется для электромагнитного поля с массой $m = 0$.

11 Лекция 11. 1 курс, 2 семестр, 23 Апреля 2020

11.1 Алгебра Вейля и дифференцирования

Сегодня мы продолжим изучение релятивистских систем и связанных с этой задачей математических понятий. Одним из таких понятий, неявно уже использовавшемся при вычислениях, является алгебра Вейля, которая есть ни что иное как алгебра дифференциальных операторов.

По определению, *алгебра Вейля* A_n это ассоциативная алгебра с образующими ∂_a, x^a $(a = 1, 2, \dots n)$, подчиненными соотношениям

$$[\partial_a, x^b] = \delta_a^b I\,, \qquad [x^a, x^b] = 0\,, \qquad [\partial_a, \partial_b] = 0, \tag{11.1}$$

где [,] - коммутатор по отношению к закону композиции в A_n. Термин образующие означает, что A_n - это алгебра всевозможных полиномов от ∂_a и x^a, подчиненных соотношениям (11.1). Иными словами, A_n это обертывающая алгебра соотношений (11.1).

Убедимся, что A_n это алгебра дифференциальных операторов. Для этого построим A_n-модуль F, который называется *модулем Фока*. По определению, F содержит элемент $|0\rangle$, который удовлетворяет условию

$$\partial_a|0\rangle = 0\,. \tag{11.2}$$

Такой элемент называется *вакуумным вектором* или *фоковским вакуумом*. Модуль F строится путем действия элементами x^a на $|0\rangle$. Иными словами, любой элемент $|f\rangle \in F$ имеет вид

$$|f\rangle := f(x)|0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} f_{a_1\dots a_k} x_1^a \dots x_k^a |0\rangle\,. \tag{11.3}$$

Задача 11.1. Убедиться, что F образует A_n-модуль. Объяснить, почему F строится только с помощью образующих x^a.

Решение

F действительно является A_n-модулем. Действие произвольного элемента алгебры на $|f\rangle$ из F даст некоторый новый элемент $|f'\rangle$.

$$a|f\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{i_1\dots i_m}{}^{j_1\dots j_n} x^{i_1}\dots x^{i_m}\partial_{j_1}\dots\partial_{j_n} \sum_{k=0}^{\infty} f_{a_1\dots a_k} x^{a_1}\dots x^{a_k}|0\rangle =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{i_1\dots i_m}{}^{j_1\dots j_n} x^{i_1}\dots x^{i_m}\partial_{j_1}\dots\partial_{j_{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} f_{a_1\dots a_k}\partial_{j_m} x^{a_1}\dots x^{a_k}|0\rangle. \tag{11.4}$$

Представить элемент алгебры A_n в таком виде можно в силу соотношений (11.1). Рассмотрим, например, выражение, в котором расстановка иная

$$x^{a_1}\dots x^{a_{n-1}}\partial_b x^{a_n} = x^{a_1}\dots x^{a_{n-1}}(\delta_b^{a_n} + x^{a_n}\partial_b) = x^{a_1}\dots x^{a_{n-1}}\delta_b^{a_n} + x^{a_1}\dots x^{a_{n-1}} x^{a_n}\partial_b. \tag{11.5}$$

Т.е. из монома с «неправильной» расстановкой операторов, перенося все ∂_b направо, можно получить **несколько** мономов с расстановкой как в (11.4). Рассмотрим отдельно следующее выражение, которое появляется в (11.4)

$$\partial_{j_m} x^{a_1} ... x^{a_k}|0\rangle = \left[\delta^{a_1}_{j_m} x^{a_2} ... x^{a_k} + x^{a_1}\delta^{a_2}_{j_m} x^{a_3} ... x^{a_k} + ... x^{a_1} ... x^{a_{k-1}}\delta^{a_k}_{j_m} + x^{a_1} ... x^{a_k}\partial_{j_m}\right]|0\rangle =$$
$$= \left[\delta^{a_1}_{j_m} x^{a_2} ... x^{a_k} + x^{a_1}\delta^{a_2}_{j_m} x^{a_3} ... x^{a_k} + ... x^{a_1} ... x^{a_{k-1}}\delta^{a_k}_{j_m}\right]|0\rangle. \quad (11.6)$$

Здесь в последнем переходе было использовано (11.2).

Таким образом, фоковский модуль алгебры Вейля совпадает с пространством функций (например, полиномов) $f(x)$.

Задача 11.2. Чему отвечает вакуум $|0\rangle$?

Чтобы убедиться, что алгебра Вейля есть ни что иное, как алгебра дифференциальных операторов надо использовать тот факт, что коммутатор $[\ ,\ ]$ в произвольной ассоциативной алгебре задает ее дифференцирование, удовлетворяющее формуле Лейбница

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]\,. \quad (11.7)$$

Задача 11.3. Доказать

В случае произвольной алгебры A, любая операция $D(a) \in A\ \forall a \in A$ называется ее *дифференцированием*, если

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a, b \in A\,. \quad (11.8)$$

Дифференцирования ассоциативных алгебр и алгебр Ли, порождаемые операцией $D_a(b) = [a, b]$, называются *внутренними.*

Задача 11.4. Доказать, что так определенное D_a задает дифференцирование алгебры Ли

В интересующем нас случае отсюда вытекает обычное правило Лейбница

$$\partial_a(f_1(x)f_2(x))|0\rangle = (\partial_a(f_1(x))f_2(x) + f_1(x)\partial_a(f_2(x)))|0\rangle, \quad (11.9)$$

которое с учетом (11.1) и означает, что ∂_a есть ни что иное как производная.

Задача 11.5. Доказать, что

$$\partial_a(f_1(x)f_2(x))|0\rangle = \partial_a f_1(x)f_2(x)|0\rangle \quad (11.10)$$

В общем случае можно доказать, что все дифференцирования той или иной алгебры Ли l или ассоциативной алгебры A сами образуют алгебру Ли $D(l)$ и $D(A)$ с лиевской операцией

$$[D_1, D_2](a) := D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))\,. \quad (11.11)$$

Задача 11.6. Доказать, что коммутатор двух дифференцирований тоже задает дифференцирование.

Решение

Доказывается прямым вычислением. Пусть

$$D_3 = [D_1, D_2], \tag{11.12}$$

нужно проверить, что

$$D_3(ab) = D_3(a)b + aD_3(b). \tag{11.13}$$

$$D_3(a) = [D_1, D_2](a) = D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a)) \tag{11.14}$$

$$\begin{aligned} D_3(ab) = [D_1, D_2](ab) = D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) = \\ = D_1(D_2(a)b + aD_2(b)) - D_2(D_1(a)b + aD_1(b)) = \\ = D_1(D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) + D_1(a)D_2(b) + a(D_1(D_2(b)) - \\ - D_2(D_1(a))b - D_1(a)D_2(b) - D_2(a)D_1(b) - aD_2(D_1(b)) = \\ = D_1(D_2(a))b - D_2(D_1(a))b + a(D_1(D_2(b)) - aD_2(D_1(b)). \end{aligned} \tag{11.15}$$

Задача 11.7. Доказать, что внутренние дифференцирования образуют идеал алгебры всех дифференцирований.

Решение

Пусть D – некоторое дифференцирование, которое не является внутренним, D_a – внутренее дифференцирование, нужно показать

$$[D, D_a](b) = [c, b] = D_c(b). \tag{11.16}$$

Действительно

$$\begin{aligned} [D, D_a](b) = D([a, b]) - [a, D(b)] = D(a)b + aD(b) - D(b)a - bD(a) - aD(b) + D(b)a = \\ = D(a)b - bD(a) = [D(a), b]. \end{aligned} \tag{11.17}$$

11.2 Операторы Казимира и лемма Шура

Как обсуждалось на предыдущей лекции, операторами Казимира называются такие элементы $c \in U(l)$, которые коммутируют со всеми элементами l.

Задача 11.8. Доказать, что любой такой c коммутирует с $U(l)$, т.е. принадлежит ее центру.

Вернемся теперь к квадратичному Казимиру алгебры Ли группы Пуанкаре

$$c_2 := P_a P_b \eta^{ab} . \tag{11.18}$$

c_2 очевидно коммутирует с P_c. Вычислим коммутатор с Лоренцевыми поворотами, используя, что коммутатор задает дифференцирование.

$$[L, c_2] = ([L_{ab}, P_c]P_d + P_c[L_{ab}, P_d])\eta^{cd} = \tag{11.19}$$

$$= (\eta_{bc} P_a P_d + P_c P_a \eta_{bd})\eta^{cd} - a \leftrightarrow b = P_a P_b - P_b P_a = 0 .$$

Фактически, это упражнение показывает, что при лоренцевых преобразованиях P_a преобразуется как вектор и поэтому его квадрат не меняется.

Докажем теперь важный факт, который называется
Лемма Шура: Пусть l - алгебра Ли, c - некоторый ее оператор Казимира и V- неприводимый l-модуль. Тогда действие c на V кратно единичному оператору

$$cv = \lambda v \qquad \forall v \in V\,, \qquad \lambda \in \mathbb{K}\,. \tag{11.20}$$

для алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ (с одним и тем же λ для всех $v \in V$).

Доказательство строится, например, так. Так как $c - \lambda I$ коммутирует с действием алгебры l и l-модуль V неприводим, отображение

$$(c - \lambda I)V \to V \tag{11.21}$$

является либо изоморфизмом либо нулевым. В этом легко убедиться, заметив, что ядро и образ эндоморфизма $V \to V$ являются подмодулями V .

Задача 11.9. Доказать

В случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ у любого оператора c найдется хотя бы один собственный вектор v_λ с некоторым собственным значением λ . Это значит, что ядро $c - \lambda I$ не пусто, так как содержит v. Но тогда $c - \lambda I$ должно действовать нулем на неприводимом l-модуле V . $\square$

Строго говоря, это доказательство справедливо для конечномерных l-модулей. Тем не менее, Лемма Шура применима и в бесконечномерном случае, если, например, ограничиться унитарными модулями, которые и ассоциируются с элементарными частицами.

Простой, но важный факт: на эквивалентных неприводимых модулях операторы Казимира совпадают

Задача 11.10. Доказать

Решение

Представления V и V' некоторой группы G или алгебры g называются эквивалентными, если существует такой изоморфизм векторных пространств $V \to V'$ U (преобразование подобия), при котором выполнены условия

$$T(\widetilde{G}) = U^{-1}T'(\widetilde{G})U, \;\; \widetilde{G} \in G, \tag{11.22}$$

если V и V' – представления группы G и

$$t(\widetilde{g}) = U^{-1}t'(\widetilde{g})U, \;\; \widetilde{g} \in g, \tag{11.23}$$

если V и V' – представления алгебры g.

Если $t(c - \lambda I)V = 0$, тогда на эквивалентном представлении это можно записать в виде

$$Ut(c - \lambda I)U^{-1}V' = \big(t'(c) - \lambda I\big)V' = 0 \tag{11.24}$$

Здесь было использовано, что $V' = UV$.

Важное следствие: если значения операторов Казимира на двух неприводимых модулях не совпадают, то модули неэквивалентны.

11.3 Вектор Паули-Любанского

Возвращаясь к анализу $iso(3,1)$-модулей, заключаем, что для неприводимых модулей (=элементарных частиц) должно быть выполнено условие

$$P_a P^a \phi + m^2 \phi = 0\,, \tag{11.25}$$

эквивалентное уравнению КГФ. Итак, уравнение КГФ всегда должно выполняться для элементарных частиц в релятивистской теории. В случае $m^2 > 0$ параметр m действительно описывает массу покоя частицы. Случай $m^2 < 0$ физически менее интересен. Он отвечает тахионам.

Задача 11.11. Убедиться, что тахионы всегда двигаются со скоростью больше скорости света.

На другом языке, тахионы отвечают неустойчивым системам, у которых энергия не ограничена снизу (опрокинутый потенциал). В природе не встречаются - наверное все улетели.

Важный вопрос - какие еще операторы Казимира есть у $iso(3,1)$? Чтобы построить еще один оператор Казимира c_4 введем так называемый вектор Паули- Любанского

$$W^a := \epsilon^{abcd} P_b L_{cd}\,. \tag{11.26}$$

Отметим, что в такой форме эту формулу удобно применять в четырехмерном пространстве. При $d > 4$ удобнее использовать полностью антисимметричный тензор третьего ранга

$$W_{abc} := P_a L_{bc} + P_b L_{ca} + P_c L_{ab}\,. \tag{11.27}$$

Замечу, что вектор Паули-Любанского принадлежит универсальной обертывающей $U(iso(3,1))$. Теперь надо проверить два свойства.

1. W^a является вектором по отношению к преобразованиям Лоренца. В инфинитезимальной форме это условие имеет вид

$$[L_{ab}, W^c] = \delta^c_b W^a - \delta^c_a W^b\,. \tag{11.28}$$

Задача 11.12. Доказать, используя свойства символа Леви-Чивиты, или доказать, что W_{abc} - тензор

2. W^b коммутирует с оператором сдвига

$$[P_a, W^b] = 0 \tag{11.29}$$

Задача 11.13. Доказать, используя определяющие соотношения алгебры Ли $iso(3,1)$.

В результате, получаем четвертичный оператор Казимира

$$c_4 := W^a W_a\,. \tag{11.30}$$

Задача 11.14. Убедиться, что

$$[P_a, c_4] = 0\,, \qquad [L_{ab}, c_4] = 0\,. \tag{11.31}$$

В четырехмерном случае существует только два оператора Казимира - c_2 и c_4. В больших размерностях их больше: именно $c_2, c_4, \dots c_n, \dots c_{2[d/2]}$.

В четырехмерном случае различные типы элементарных частиц характеризуются двумя числами - массой и спином. Масса связана с c_2, а спин с c_4:

$$c_4 = m^2 s(s+1)\,, \qquad s = 0, 1/2\,, 1\,, 3/2, \dots\,. \tag{11.32}$$

Задача 11.15. Проверить для скалярного поля, что оно обладает спином 0

Решение

Случай скалярного поля прост. Не нужно считать действие всего четвертичного оператора Казимира, а достачно проверить, что вектор Паули-Любанского действует нулем на скалярное поле. Действительно

$$\begin{aligned} W^a\phi(x) = \epsilon^{abcd}P_b L_{cd}\phi(x) = \epsilon^{abcd}\partial_b\big(x_c\partial_d - x_d\partial_c\big)\phi(x) = \\ = 2\epsilon^{abcd}\partial_b x_c\partial_d\phi(x) = 2\epsilon^{abcd}(\eta_{bc} + x_c\partial_b)\partial_d\phi(x) = 0. \end{aligned} \tag{11.33}$$

Наивно может показаться, что действие вектора Паули-Любанского на любое поле даст ноль. Это не так! Для вычисления его значения на других полях, например на векторном, нужно использовать представление генераторов алгебры Лоренца для векторного поля, которое уже не есть $L_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a$.

Полученные результаты указывают на то, что релятивистских полей существует бесконечно много. Используя теорию представлений, не очень трудно описать их все. Мы сделаем это в оставшихся в этом семестре лекциях, начав в следующей лекции с изучения необходимого для этого понятия тензорного произведения и тензора.

Лекция 12.
1 курс, Осенний семестр, 30 апреля 2020.

12.4 Тензорное произведение

Мы изучили скалярное поле (спин 0). Какие еще релятивистские системы встречаются? Ответ на этот вопрос тесно связан с ответом на вопрос какие существуют представления группы Пуанкаре. То, что даже конечномерных представлений групп Лоренца и Пуанкаре бесконечно много следует из конструкции тензорного произведения, которую я сейчас введу.

Пусть V_1 и V_2 два линейных пространства. Мы знакомы с понятием прямой суммы $V_1 \oplus V_2$: элементы $(v_1\,, v_2)$ с линейным действием

$$\lambda(v_1\,, v_2) + \mu(w_1\,, w_2) = (\lambda v_1 + \mu w_1\,, \lambda v_2 + \mu w_2)\,.$$

Если $\{e_i\}$ и $\{e_\alpha\}$ - базисы в V_1 и V_2, то базис в $V_1 \oplus V_2$ есть $\{e_i\,, e_\alpha\}$.

Задача 12.1. В чем различие понятий прямой суммы $V_1 \oplus V_2$ и линейной оболочки $Span(V_1, V_2)$ двух линейных пространств V_1 и V_2?

Решение

Если векторные пространства V_1 и V_2 имеют пустое пересечение, то

$$Span(V_1, V_2) = V_1 \oplus V_2, \quad if \;\; V_1 \cap V_2 = \emptyset. \tag{12.1}$$

Если же пересечение не пусто, то

$$Span(V_1, V_2) = \Big(V_1 \backslash (V_1 \cap V_2)\Big) \oplus \Big(V_2 \backslash (V_1 \cap V_2)\Big) \oplus \Big(V_1 \cap V_2\Big). \tag{12.2}$$

Можно так же привести следующую формулу для размерности

$$\dim\Big(Span(V_1, V_2)\Big) = \dim\Big(V_1 \oplus V_2\Big) - \dim\Big(V_1 \cap V_2\Big). \tag{12.3}$$

Тензорное произведение задает другую операцию, сопоставляющую двум пространствам V и W третье, которое обозначается $V \otimes W$. Попросту говоря, тензорное произведение это замена понятия декартового произведения $V \times W$, согласованная с линейностью в том смысле, что

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2) \otimes (b_1 w_1 + b_2 w_2) = a_1 b_1 v_1 \otimes w_1 + a_2 b_1 v_2 \otimes w_1 + a_1 b_2 v_1 \otimes w_2 + a_2 b_2 v_2 \otimes w_2\,. \tag{12.4}$$

Тензорное произведение отличается от линейной оболочки декартова произведения $Span(V \times W)$.

Задача 12.2. Какова размерность $Span(V_1 \times V_2)$?

Решение

Структуру линейного пространства $Span(V_1 \times V_2)$ зададим следующим образом. Каждую пару (v_1, v_2) из декартового произведения будем считать линейно независимым элементом векторного пространства. В этом случае в $Span(V_1 \times V_2)$ континуально много базисных векторов и следовательно

$$\dim\left(Span(V_1 \times V_2)\right) = \infty. \tag{12.5}$$

Тензорное произведение можно понимать как фактор-пространство $Span(V_1 \times V_2)/E$ где E - подпространство $Span(V_1 \times V_2)$, натянутое на соотношения факторизации, т.е.

$$E = Span\{(a_1v_1 + a_2v_2) \otimes (b_1w_1 + b_2w_2) - a_1b_1v_1 \otimes w_1 - a_2b_1v_2 \otimes w_1 - a_1b_2v_1 \otimes w_2 - a_2b_2v_2 \otimes w_2\}$$

Задача 12.3. Доказать.

Разлагая векторы $v \in V$, $w \in W$ по базисам $\{e_i\} \in V$, $\{f_\alpha\} \in W$

$$v = \sum_i v^i e_i \,, \qquad w = \sum_\alpha w^\alpha f_\alpha \,,$$

получаем, что любой вектор тензорного произведения $V \otimes W$ разлагается в линейную комбинацию векторов $e_i \otimes f_\alpha$, которые и образуют базис $V \otimes W$. По определению тензорного произведения все эти вектора линейно независимы.

Задача 12.4. Убедиться.

Решение

Предположим, что базис в $V \otimes W$ является линейно засимым, т.е.

$$\sum_i \sum_\alpha A^{i,\alpha} e_i \otimes f_\alpha = 0. \tag{12.6}$$

Последнее равенство можно переписать в следующей форме

$$\sum_i e_i \otimes \left(\sum_\alpha A^{i,\alpha} f_\alpha \right) = \sum_\alpha \left(\sum_i A^{i,\alpha} e_i \right) \otimes f_\alpha = 0 \,. \tag{12.7}$$

Выражения в скобках могут равняться нулю только в том случае, если составляют тривиальную линейную комбинацию при свертке по индексу α или i соответственно, так как по определению e_i и f_α базисы в пространствах V и W. Следовательно, не существует ненулевых $A^{i,\alpha}$, удовлетворяющих (12.6).

Задача 12.5. Пусть $\dim V_1 = N_1$ и $\dim V_2 = N_2$. Убедиться, что $\dim V_1 \otimes V_2 = N_1 N_2$.

Тензорное произведение обладает свойством *проективности*: $V \otimes W$ - максимальное пространство, обладающее свойством билинейности по сомножителям. Формально это свойство выражается следующим образом: любое билинейное отображение $V \times W \overset{\rho}{\frown\!\!\!\longrightarrow} U$ может быть представлено в виде

$$V \times W \to V \otimes W \overset{\sigma}{\frown\!\!\!\longrightarrow} U = V \times W \overset{\rho}{\frown\!\!\!\longrightarrow} U \,.$$

Общий элемент тензорного произведения конечномерных пространств $V \otimes W$ имеет вид

$$a \in V \otimes W \;:\quad a = \sum_{i,\alpha} A^{i,\alpha} e_i \otimes f_\alpha \,.$$

Коэффициенты $A^{i,\alpha}$ несут индексы, отвечающие каждому из пространств V и W и в остальном произвольны. В приложениях, именно эти коэффициенты называются тензорами. Для приложений этого обычно достаточно.

Важнейшим свойством тензорного произведения векторных пространств является его ассоциативность

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)\,.$$

Это свойство наследуется из ассоциативности декартового (прямого) произведения

Задача 12.6. Доказать

Таким образом тензорное произведение порождает ассоциативную *тензорную алгебру* векторных пространств.

Как линейное пространство, эта алгебра разлагается в бесконечною прямую сумму всевозможных тензорных произведений заданного линейного пространства V с базисом e_i, т.е. его элементы допускают следующее разложение

$$a\,Id \oplus a^i e_i \oplus a^{ij} e_i \otimes e_j \oplus a^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k + \dots$$

с тензорным произведением в качестве закона композиции алгебры.

Задача 12.7. Что является единичным элементом тензорной алгебры?

Пусть V и W - линейные пространства функций $f(x)$ и $g(y)$, которые зависят от, вообще говоря, разных переменных x^a и y^α. Что такое пространство $V \otimes W$?

Задача 12.8. Убедиться, что $V \otimes W$ есть ни что иное как линейное пространство функций двух переменных $F(x, y)$.

Решение

В силу теоремы Тейлора можно выбрать следующий базис в простантсвах V и W

$$e_I = \{x^{a_1}, x^{a_1}x^{a_2}, \dots, x^{a_1}x^{a_2}...x^{a_n}, \dots\}, \;\; f_J = \{y^{b_1}, y^{b_1}y^{b_2}, \dots, y^{b_1}y^{b_2}...y^{b_n}, ...\}. \tag{12.8}$$

Элемент из пространства $V \otimes W$ в силу определения можно записать в виде

$$\sum_I \sum_J A^{I,J} e_I \otimes f_J. \tag{12.9}$$

Опять же в силу теоремы Тейлора, выбирая всевозможные коэффициенты $A^{I,J}$, получим все возможные функции двух переменных $F(x, y)$.

Пусть g-некоторая алгебра Ли, а V_1 и V_2 некоторые g-модули, реализованные матрицами (операторами) T_{1i} и T_{2i}, действующими в пространствах V_1 и V_2, соответственно. Определим g-модуль как тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$, в котором действие g определяется следующим образом

$$T_{1,2}(V_1 \otimes V_2) := T_1(V_1) \otimes V_2 + V_1 \otimes T_2(V_2)\,. \tag{12.10}$$

Задача 12.9. Доказать, что такое определение действительно порождает g-модуль. Подсказка: нужно доказать, что

$$[T\,, T']_{1,2}(V_1 \otimes V_2) = [T_1\,, T'_1](V_1) \otimes V_2 + V_1 \otimes [T_2\,, T'_2](V_2)\,,$$

T и T' элементы представления g, отвечающие двум разным элементам g.

Решение

$$
\begin{aligned}
[T,T']_{1,2}(V_1\otimes V_2) = \Big(T_{1,2}T'_{1,2} - T'_{1,2}T_{1,2}\Big)(V_1\otimes V_2) = \\
= T_{1,2}\Big(T'_1(V_1)\otimes V_2 + V_1\otimes T'_2(V_2)\Big) - T'_{1,2}\Big(T_1(V_1)\otimes V_2 + V_1\otimes T_2(V_2)\Big) = \\
= T_1T'_1(V_1)\otimes V_2 + T'_1(V_1)\otimes T_2(V_2) + T_1(V_1)\otimes T'_2(V_2) + V_1\otimes T_2T'_2(V_2) - \\
- T'_1T_1(V_1)\otimes V_2 - T_1(V_1)\otimes T'_2(V_2) - T'_1(V_1)\otimes T_2(V_2) - V_1\otimes T'_2T_2(V_2) = \\
= \big(T_1T'_1 - T'_1T_1\big)(V_1)\otimes V_2 + V_1\otimes\big(T_2T'_2 - T'_2T_2\big)(V_2) = \\
= [T_1,T'_1](V_1)\otimes V_2 + V_1\otimes[T_2,T'_2](V_2) = [T,T']_{1,2}(V_1,V_2). \quad (12.11)
\end{aligned}
$$

Здесь используется, что благодаря свойствам тензорного произведения и знаку минус в определении коммутатора, члены, в которых одно T действует на первый сомножитель, а второе - на второй, попарно сокращаются.

Таким образом мы пришли к важнейшему заключению, что тензорное произведение $V_1\otimes V_2$ двух g-модулей V_1 и V_2 порождает новый g-модуль. Это открывает широкие возможности для построения новых модулей по уже известным.

Например, пусть V - векторный модуль $o(p,q)$ с базисом e_a и элементами $v = v^a e_a$. Тогда элементы k кратного тензорного произведения $V\otimes V\otimes\ldots\otimes V$ описываются всевозможными тензорами $v^{a_1,a_2,\ldots,a_k}$.

Хотя тензорные произведения порождают новые модули алгебр Ли, эти модули далеко не всегда неприводимы. Пусть V некоторый g-модуль. Рассмотрим тензорное произведение $V^n := \underbrace{V\otimes V\otimes\ldots\otimes V}_{n}$ модуля V самого на себя. На V^n действует симметрическая группа S_n, переставляющая различные сомножители. Например, если

$$v^2\in V^2\,,\qquad v^2 = A^{a\,b}e_a\otimes e_b$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование) то

$$T_{12}v^2 = A^{b\,a}e_a\otimes e_b\,,$$

где $T_{12}\in S_2$ элементарная перестановка V_1 и V_2. Аналогично, в общем случае элемент симметрической группы может описывать любую подстановку.

Пусть теперь V это g-модуль. Тогда и V^n-g-модуль. Важный факт состоит в том, что симметрическая группа порождает гомоморфизмы V^n в себя. Это следствие симметрии определения (12.10) действия алгебры Ли на тензорном произведении.

Задача 12.10. Доказать.

Это позволяет классифицировать различные g-модули в терминах типов симметрии по отношению к S_n, т.е. по ее представлениям.

Рассмотрим простейший пример. Пусть V-векторное пространство gl_n

$$v\in V: v = v^a e_a\,,\qquad a = 1,\ldots n\,,$$

$$t(v) = t^a{}_b v^b e_a \,, \qquad t^a{}_b \in gl_n \,.$$

Представим $V \otimes V$ в виде

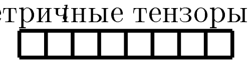
$$V \otimes V = (V \otimes V)_S \oplus (V \otimes V)_A \,,$$

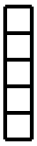
где

$$V_S := v_S^{(ab)} e_a \otimes e_b \,, \qquad V_A := v_A^{(ab)} e_a \otimes e_b$$
$$v_S^{(ab)} = v_S^{(ba)} \,, \qquad v_A^{(ab)} = -v_A^{(ba)} \,.$$

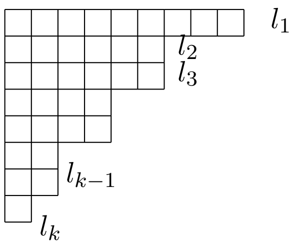
Легко видеть, что V_S и V_A образуют два неприводимых подмодуля симметрической группы $S_2 = \mathbb{Z}_2$: на V_S S_2 действует тривиально, а на V_A элементарная подстановка меняет знак элемента. Попросту говоря, мы разбили тензор неопределенного типа симметрии в сумму симметричного и кососимметричного, каждый из которых образует gl_n-модуль.

В общем случае, это позволяет строить инвариантные подпространства V^k проектированием на различные неприводимые представления симметрической группы. Последние характеризуются различными диаграммами Юнга. Эта конструкция является очень общей, выражая двойственность теории представлений взаимно-коммутативных структур. (В данном случае действия алгебры Ли и симметрической группы на тензорных произведениях некоторого g-модуля V.)

На этом языке, каждому сомножителю V сопоставляется ящик $\square$. Полностью симметричные тензоры ранга l обозначаются горизонтальными строками из ящиков длины l 

а полностью антисимметричные тензоры ранга h обозначаются вертикальными столбцами высоты h. 

Другие типы симметризации описываются всевозможными диаграммами Юнга $Y(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k)$:



$$l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_k$$

$$l_1 + l_2 + \ldots l_k = n$$

.

Общая диаграмма описывает тензор

$$A^{a_1(l_1), a_2(l_2), \ldots a_k(l_k)} \,,$$

который симметричен по l_1 индексам a_1, l_2 индексам a_2, и т.д. (Здесь в скобках указывается число индексов iой группы l_i, по которым производится симметризация.)

Определяющим свойством диаграмм Юнга является требование, что симметризация любого индекса из строки с номером j со всеми индексами любой строки с номером $i < j$ дает ноль. Иными словами, симметричный базис представлен тензорами вида $A^{a_1(l_1),a_2(l_2),\ldots,a_k(l_k)}$, удовлетворяющими условиям Юнга в форме

$$A^{a_1(l_1),a_2(l_2),\ldots,\, a_m(l_m),\ldots,a_m\, a_{m+p}(l_{m+p}-1),\ldots,a_k(l_k)} = 0 \tag{12.12}$$

Тот факт, что $l_m \geq l_{m+p}$ является следствием этих условий. Действительно, рассмотрим для простоты тензор $A^{a(m),b(n)}$, описываемый диаграммой недопустимой формы с $m < n$. Обозначая симметризованные индексы одной буквой и используя условие Юнга,

получаем $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\cline{1-5} a&a&a&a&a&\multicolumn{2}{c}{}\\ \hline b&b&b&b&b&b&b\\ \hline\end{array} + \mathrm{m} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\cline{1-5} a&a&a&a&b&\multicolumn{2}{c}{}\\ \hline b&b&b&b&b&b&a\\ \hline\end{array} =0\,,$

$2 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\cline{1-5} a&a&a&a&b&\multicolumn{2}{c}{}\\ \hline b&b&b&b&b&b&a\\ \hline\end{array} + (\mathrm{m}\text{-}1) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\cline{1-5} a&a&a&b&b&\multicolumn{2}{c}{}\\ \hline b&b&b&b&b&a&a\\ \hline\end{array} =0\,, \qquad etc$

В результате, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\cline{1-5} a&a&a&a&a&\multicolumn{2}{c}{}\\ \hline b&b&b&b&b&b&b\\ \hline\end{array} = (-1)^m C_n^m \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\cline{1-5} b&b&b&b&b&\multicolumn{2}{c}{}\\ \hline a&a&a&a&a&b&b\\ \hline\end{array}$

или, эквивалентно,

$$A^{a(m),b(n)} = (-1)^m C_n^m A^{b(m),(a(m)b(n-m))}$$

Снова используя условие Юнга (12.12) в случае $n - m > 0$ получаем $A^{a(m),b(n)} = 0$.

Комментарий

Чтобы понять смысл происходящего полезно рассмотреть пример диаграммы с одним ящиком в первой строке и двумя во второй.

Задача 12.11. Доказать, что соответствующий тензор с $l_1 = 1$ и $l_2 = 2$ равен нулю.

Аналогичным образом можно доказать, что

$$A^{a(m),b(m)} = (-1)^m A^{b(m),a(m)}\,.$$

.

Форма диаграмм Юнга может быть понята из следующей конструкции. Пусть дан тензор $A^{a,b,c,\ldots}$. Выделим его компоненту с максимально симметричным числом индексов l_1, поместив эти индексы в первую строку. По определению, симметризация любого другого индекса с индексами первой строки дает ноль. Затем выделим компоненту с максимально симметричным числом индексов среди оставшихся, которое назовем l_2. По определению, $l_2 \leq l_1$. Продолжение этого процесса приводит к той или иной диаграмме Юнга. Надо только иметь в виду, что произвольный тензор может содержать несколько (и даже много) неприводимых компонент, подобно тому, как произвольный тензор второго ранга разлагается в сумму симметричного и антисимметричного.

Кроме симметричного базиса, часто используется антисимметричный базис, в котором явной является антисимметрия индексов по столбцам с условием, что антисимметризация по любому индексу из n-ого столбца со всеми индексами m-ого столбца дает ноль при $n > m$. Важно понимать, что в общем случае невозможно добиться явной симметрии по строкам и антисимметрии по столбцам одновременно. Но переход от одного базиса к другому осуществляется достаточно просто. Например, начиная с симметричного базиса, можно антисимметризовать максимум h_1 (где h_1 число строк в диаграмме) индексов, поскольку антисимметризация по любым индексам из одной строки дает ноль. Затем можно антисимметризовать по h_2 индексам, что ведет к образованию второго столбца высоты h_2 и т.д.

Задача 12.12. Связать компоненты тензоров типа *крюк* $A^{aa,b}$ и *окошко* $A^{aa,bb}$ в симметричном базисе с их компонентами в антисимметричном базисе.

Диаграммы Юнга - это очень содержательный сюжет, о котором мы обычно рассказываем в ФИАНе в осеннем семестре на втором курсе в связке с важным понятием двойственности Хау, дающей мощный инструмент анализа представлений.

Пусть V -некоторое линейное пространство с базисом $\{e_i\}$, а V^* сопряженное пространство с базисом $\{e^{*i}\}$. Напомню, что V^* это пространство линейных функционалов $v^*(v)$ на V. Канонический выбор базисов таков, что

$$e^{*i}(e_j) = \delta^i_j \,.$$

Несложно убедиться, что пространство $V \otimes V^* = A^i{}_j e_i \otimes e^{*j}$ есть пространство всех линейных отображений V в себя (*эндоморфизмов* $End\, V$).

Задача 12.13. Доказать

Задача 12.14. Разложить $V \otimes V^*$ на неприводимые компоненты.

Оказывается, что конечномерные представления конечномерных простых групп полностью описываются тензорами различных типов симметрии (бесследовыми в случае ортогональных и симплектических групп), т.е. различными диаграммами Юнга. Бесследовость означает, что свертка по любой паре индексов с инваринтным тензором типа метрики Минковского η^{ab} дает ноль. Например, $\eta_{ab}A^{ab} = 0$.

13 Лекция 13. 1 курс, Весенний семестр, 7 мая 2020.

13.1 Напоминание

Мы изучили основные понятия теории групп, линейной алгебры и алгебр Ли. Изучили ортогональные группы, группы нерелятивистских симметрий (группа Галилея) и группу релятивистских симметрий (группа Пуанкаре).

Кроме того изучили простейшее релятивистское уравнение - уравнение Клейна-Гордона-Фока для скалярного поля $\phi(x)$

$$\Box\phi(x) + m^2\phi(x) = 0\,. \tag{13.1}$$

Убедились, что решения этого уравнения образуют модуль алгебры Пуанкаре. Этот модуль оказывается неприводимым и описывает частицу спина 0 и массы m. Осознание этого факта переводит общий вопрос о классификации возможных типов элементарных частиц на язык теории представлений группы (алгебры) Пуанкаре. Впервые это было понято Вигнером, который и проклассифицировал все типы (хороших) элементарных частиц. В этой лекции я обрисую идею вигнеровского подхода, опирающегося исключительно на определение алгебры Пуанкаре.

Напомню, что алгебра Пуанкаре порождается инфинитезимальными трансляциями P_n и Лоренцевыми вращениями L_{nm}, удовлетворяющими соотношениям

$$[P_n\,, P_m] = 0\,, \tag{13.2}$$

$$[L_{nm}\,, P_l] = -i(\eta_{ml}P_n - \eta_{nl}P_m)\,, \tag{13.3}$$

$$[L_{nm}\,, L_{kl}] = -i(\eta_{mk}L_{nl} - \eta_{nk}L_{ml} - \eta_{ml}L_{nk} + \eta_{nl}L_{mk})\,. \tag{13.4}$$

Я здесь немного поменял нормировку генераторов, поделив их на мнимую единицу для будущего удобства, так что теперь их реализация дифференциальными операторами (для случая скалярного поля) имеет вид

$$P_n = -i\frac{\partial}{\partial x^n}\,, \qquad L_{nm} = -i\left(x_n\frac{\partial}{\partial x^m} - x_m\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\,. \tag{13.5}$$

Появление мнимой единицы в правой части соотношений алгебры Ли

$$[t_a\,, t_b] = if^c_{ab}t_c \tag{13.6}$$

с вещественными структурными константами f^c_{ab} свидетельствует о том, что генераторы t_a допускают реализацию эрмитовыми операторами.

Задача 13.1. Убедиться

Решение

Пусть генераторы реализованы эрмитовыми операторами (матрицами), а структурные константы вещественны. Применим эрмитово сопряжение к соотношениям алгебры Ли

$$[t_a, t_b]^\dagger = \big(t_a t_b - t_b t_a\big)^\dagger = \big(t_b^\dagger t_a^\dagger - t_a^\dagger t_b^\dagger\big) = \big(t_b t_a - t_a t_b\big) = [t_b, t_a] = -[t_a, t_b],$$

$$\big(i f_{ab}^c t_c\big)^\dagger = -i f_{ab}^c t_c^\dagger = -i f_{ab}^c t_c.$$

Это удобно тем, что у эрмитовых операторов вещественные собственные значения. Напомню, что операторы трансляций приобретали диагональный вид на гармонических плоских волнах

$$\phi_p(x) := \exp i p_n x^n\,. \tag{13.7}$$

Теперь

$$P_n \phi_p(x) = p_n \phi_p(x) \tag{13.8}$$

с вещественными собственными значениями p_n операторов P_n.

13.2 Классификация элементарных частиц по Вигнеру

Пусть пространство V - Пуанкаре-модуль. В случае скалярного поля V- пространство (положительно-частотных) решений уравнения КГФ.

Поскольку $P_n P^n$ оператор Казимира группы Пуанкаре, в соответствии с Леммой Шура, он должен быть пропорционален единичному в неприводимом унитарном представлении

$$P_n P^n V = m^2 V\,, \tag{13.9}$$

где m^2 - число, характеризующее модуль V.

Имеется три различных возможности:
$m^2 > 0$: массивные частицы
$m^2 = 0$: безмассовые частицы
$m^2 < 0$: тахионы.

Физический интерес представляют первые два случая, которыми мы и займемся.

Поскольку операторы P_n коммутируют, их можно диагонализовать одновременно. (Напомню, что диагональные матрицы коммутируют.) Пусть V_p - собственное подпространство V с собственными значениями p_n операторов P_n

$$P_n V_p = p_n V_p\,. \tag{13.10}$$

Задача 13.2. Почему важно условие коммутативности P_n?

Задача 13.3. Что такое пространство V_p в случае скалярного поля?
Решение

$$\exp\{i p_n x^n\}.$$

Для представления V с определенным m^2, собственные значения p_n должны удовлетворять условию

$$p_n p^n = m^2\,. \tag{13.11}$$

Это условие называется условием *массовой оболочки*.

В следствие (13.3), под действием преобразований Лоренца p_a преобразуется как вектор. Как мы уже проверяли, уравнение (13.11) описывает орбиты группы Лоренца. В случаях $m^2 > 0$ и $m^2 = 0$ имеется по две орбиты ортохронной группы Лоренца: с $p^0 > 0$ и $p^0 < 0$, отвечающие положительным и отрицательным частотам.

Кроме того, при $m^2 = 0$ есть еще орбита, состоящая из одной точки $p^n = 0$. Этот случай нам еще пригодится.

Задача 13.4. Убедиться, что в патологическом тахионном случае разделения на положительные и отрицательные частоты не имеет Лоренц-инвариантного смысла.

Решение

Для доказательства достачно предъявить преобразование Лоренца, которое из $p^0 > 0$ даст $p'^0 < 0$. Рассмотрим буст вдоль оси x

$$\Lambda^m{}_n = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.12}$$

и четыре-импульс тахиона в форме

$$p^n = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13.13}$$

Выполнив буст получим четыре-импульс в новой системе отсчета

$$p'^0 = \Lambda^0{}_n p^n = \gamma\left(p^0 - \beta p^1\right). \tag{13.14}$$

Выбрав $\beta = p^0/p^1 + \varepsilon$ получим, что ортохронным преобразованием можно из положительно частотной моды получить отрицательно частотную. Поскольку рассматриваются именно тахионы, то опредленное таким образом β меньше единицы.

В общем случае, пространства V_p с разными p_n, принадлежащими одной орбите, переводятся друг в друга лоренцевыми преобразованиями. В результате,

$$V = \oplus_p V_p\,, \qquad p: \quad p_n p^n = m^2\,. \tag{13.15}$$

Задача 13.5. Что означает это разложение в примере скалярного поля?

Решение

$$\phi^+(x) = \int d^4p\,\theta(p^0)\delta(p_n p^n - m^2)\widetilde{\phi}(p)\exp\{ip_n x^n\}. \tag{13.16}$$

Здесь функция Хевисайда

$$\theta(x) := 1(0)\,, \qquad x \geq 0 (x < 0)$$

выделяет положительно-частотную ветвь. Дельта-функция фактически означает, что интегрирование ведется по p_n, удовлетворяющим условию массовой оболочки $p_n p^n = m^2$. Такая запись удобна тем, что в ней на моды $\widetilde{\phi}(p)$ не накладываются какие-либо ограничения. Эквивалентная запись, не использующая обобщенных функций, имеет вид

$$\phi(x) = \int d^3\vec{p}\,\phi'(p)\exp\{ip_n x^n\}\,, \qquad p^n = (p^0, \vec{p})\,, \qquad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \tag{13.17}$$

Поскольку преобразования Лоренца обратимы, пространства V_p с разными p^n на одной орбите группы Лоренца изоморфны. В результате, для того чтобы изучить модуль V, остается изучить структуру пространства V_p для одного из p^n на орбите $p^2 = m^2$.

Прежде чем переходить к формальному анализу следует понять, о чем идет речь на языке формул. В общем случае, вместо скалярного поля, релятивистские частицы описываются функциями $\phi^A(x)$ с некоторым индексом A. Все они удовлетворяют уравнению КГФ с некоторой массой. Разложение Фурье есть разложение по собственным подпространствам V_p. Индекс A определяет структуру пространства V_p при фиксированном p^n.

Задача состоит в том, чтобы найти возможную структуру V_p при фиксированном p. Поскольку V_p с различными p связаны преобразованиями Лоренца, достаточно проанализировать V_p для некоторого одного *стандартного* p_n, удовлетворяющего (13.11).

13.2.1 Массивный случай

Рассмотрим вначале массивный случай. В этом случае наиболее удобный выбор имеет вид

$$p_n = (m, 0, \dots 0)\,. \tag{13.18}$$

Такой выбор обычно называется переходом в систему покоя, так как он отвечает ситуации, когда скорости, ассоциированные с $\vec{p}$, равны нулю.

Структура V_p при заданном p_n определяется теми преобразованиями Лоренца, которые оставляют выбранный p_n инвариантным. Группа таких преобразований называется *Малой Группой Вигнера*, а ее алгебра Ли - *Малой Алгеброй Вигнера.*

Задача 13.6. Найти малую группу Вигнера в массивном случае $m^2 > 0$.

Очевидно, малая группа Вигнера в массивном случае есть $O(d-1)$ для частицы в d-мерном пространстве-времени. Она действует на нулевые компоненты стандартного импульса (13.18) тем самым не меняя его. В привычном нам случае $d = 4$ это группа $O(3)$.

Таким образом классификация разных типов элементарных частиц, сводящаяся к классификации унитарных представлений группы Пуанкаре, свелась к классификации унитарных представлений малой группы Вигнера, которая для случая массивных частиц есть $O(d-1)$. Иными словами, различным представлениям алгебры Пуанкаре отвечают различные (попарно неизоморфные) $O(d-1)$-модули.

Я не буду останавливаться на формальном доказательстве этого факта, который следует из конструктивного описания уравнений движения различных типов частиц в духе уравнений массивного поля спина 1, которые мы обсудим ниже.

Задача 13.7. Какие $O(d-1)$-модули вы знаете?
d - размерность пространства-времени. (В нашем пространстве Минковского $d=4$.)

Первый нетривиальный пример дается векторным $o(d-1)$-модулем. В этом случае, элементы V_p являются $o(d-1)$-векторами. Обозначим их $\widetilde{A}_i(p)$ с $i=1,\dots,d-1$. Этот тип модулей ассоциируется с простейшей диаграммой Юнга $\square$.

Аналогично случаю скалярного поля, $\widetilde{A}_i(p)$ отождествляется с Фурье компонентами релятивистского векторного поля $A_n(x)$. Как любое неприводимое векторное поле $A_n(x)$ должно удовлетворять уравнению КГФ

$$(\square+m^2)A_n(x)=0\,, \tag{13.19}$$

ограничивающему импульс условием (13.11).

Ясно, что решения (13.19) образуют Пуанкаре - модуль.

Комментарий
Как ив случае скалярного поля, сначала нужно построить представление группы Пуанкаре. В данном случае векторное, где действие элементов группы Пункаре реализовано следующим образом

$$A'^n(x')=\Lambda^n{}_m A^m\Big((\Lambda^{-1})^l{}_q x^q-a^l\Big).$$

Задача 13.8. Неприводим ли этот модуль?

Задача 13.9. Какое инвариантное подпространство можно выделить?

Подмодуль выделяется наложением следующего *условия Лоренца*

$$\partial_n A^n(x)=0\,. \tag{13.20}$$

Задача 13.10. Убедиться, что это условие Пуанкаре инвариантно и выделяет подмодуль.

Решение
При трансляциях очевидно, что условие (13.20) переходит в себя. Действительно, если верно (13.20), то выполнено и $\partial_n A^n(x-a)=0$. При преобразованиях Лоренца аналогично

$$\frac{\partial}{\partial x^n}A^n(x)\quad\Longrightarrow\quad(\Lambda^{-1})^m{}_n\frac{\partial}{\partial x'^m}\Lambda^n{}_l A^l(x')=\frac{\partial}{\partial x'^m}A^m(x').$$

Убедимся теперь, что таким образом как раз получается описание частицы спина 1, отвечающей векторному представлению малой группы Вигнера. Действительно, переходя к Фурье компонентам

$$A^n(x)=\int d^dp\tilde{A}^n(p)\exp ix^np_n\,, \tag{13.21}$$

убеждаемся, что уравнение (13.19) ограничивает импульсы p^n Лоренц-инвариантным условием *массовой оболочки* (13.11).

В системе покоя, где только p_0–компонента отлична от нуля, условие Лоренца дает $\widetilde{A}_0(p) = 0$ оставляя неограниченными пространственные компоненты $\widetilde{A}_i(p)$. Вектора $\widetilde{A}_i(p)$ как раз и порождают линейное пространство V_p, образующее векторный $o(d-1)$-модуль.

Замечу, что массивные поля спина 1 играют важную роль в современной теории элементарных частиц. Так описываются векторные бозоны $W^\pm$ и Z.

Общее правило построения уравнений массивных частиц, впервые примененное Дираком в 30х годах прошлого века, таково: берите то или иное тензорное поле $A^{n_1,n_2,\cdots}$, подчините его уравнению КГФ с той или иной массой $m^2 > 0$ и наложите на него максимально возможное число Пуанкаре-инвариантных условий типа определенной симметрии по тензорным индексам, бесследовости и всевозможные условия Лоренца.

Проиллюстрируем это на примере массивного поля спина 2. Соответствующие релятивистские уравнения накладываются на тензорное поле $\phi^{nm}(x)$, которое удовлетворяет уравнению КГФ

$$(\Box + m^2)\phi^{nm}(x) = 0\,, \tag{13.22}$$

а также условию симметрии

$$\phi^{nm} = \phi^{mn} \tag{13.23}$$

бесследовости

$$\phi^{nm}\eta_{nm} = 0\,, \tag{13.24}$$

и поперечности

$$\partial_n\phi^{nm} = 0\,. \tag{13.25}$$

В системе покоя последнее уравнение дает условие $\phi^{0n} = 0$.

$$\partial_n\phi^{nm}(x) = \partial_n \int d^dp\, \widetilde{\phi}^{nm}(p) \exp ip_kx^k = i\int d^dp\, \underbrace{p_n\widetilde{\phi}^{nm}(p)} \exp ip_kx^k = 0$$

$$\Longrightarrow \quad p_n\widetilde{\phi}^{nm}(p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m\widetilde{\phi}^{0n} = 0$$

Это означает, что остаются ненулевыми только пространственные компоненты ϕ^{ij} $i,j = 1,\dots n-1$, подчиненные условиям симметрии и бесследовости

$$\phi^{ij} = \phi^{ji}\,, \qquad \phi^{ij}\delta_{ij} = 0\,. \tag{13.26}$$

Такой тензор действительно образует неприводимое представление малой группы Вигнера $O(d-1)$.

Что значит рассмотреть тензор определенной симметрии вопрос не такой простой - ответ на него дается на языке диаграмм Юнга. Как мы уже обсуждали, тот же язык дает ответ на вопрос о классификации тензорных представлений $o(n)$. Различные модули характеризуются наборами спинов $s_1 = l_1$, $s_2 = l_2, \dots$, ассоциированными с длинами строк соответствующих диаграмм Юнга. В случае алгебры Ли $o(3)$ ее конечномерные представления описываются бесследовами симметричными тензорами $A^{a_1,\cdots a_s}$ произвольного ранга s, который и называется спином.

Задача 13.11. Убедиться, что в случае малой алгебры Вигнера $o(3)$, отвечающей четырехмерному пространству Минковского, любые антисимметричные тензоры можно свести к симметричным с помощью символа Леви-Чивита. В частности, показать, что антисимметричный тензор второго ранга A^{ij} эквивалентен вектору A^k.

Решение

Количество степеней свободы у антисимметричного тензора второго ранга равно 3. Ровно столько же имеет вектор. Отображение, которое их связывает

$$A_i = \epsilon_{ijk} A^{jk}.$$

Данное отображение биективно. Обратное получается тоже с использованием символа Леви-Чивиты

$$\epsilon_{ijk} A^k = \epsilon_{ijk} \delta_{km} A_m = \epsilon_{ijk} \delta_{km} \epsilon_{mpq} A^{pq} = \left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\right) A^{pq} = 2A_{ij}. \tag{13.27}$$

14 Лекция 14. 1 курс, Весенний семестр, 14 мая 2020.

14.1 Конструкция Вигнера: безмассовый случай

В безмассовом случае задача состоит в том, чтобы проанализировать V_p для светоподобного импульса p_n, удовлетворяющего $p_n p_m \eta^{nm} = 0$. Достаточно проанализировать случай любого (ненулевого) светоподобного вектора p_n, который можно выбрать например в виде

$$\mathbf{p}_n = \omega(1, 1, 0, \dots 0)\,, \tag{14.1}$$

где ω - некоторое ненулевое число.

Мы должны найти малую алгебру Вигнера l_p как подалгебру Лоренца, оставляющую инвариантным $\mathbf{p}_n$. Очевидно, l_p содержит алгебру $o(d-2)$, действующую на нулевые компоненты $\mathbf{p}_n$. Ее генераторы:

$$L_{\mathbf{ij}}\,, \qquad \mathbf{i}, \mathbf{j} = 2, \dots d-1\,. \tag{14.2}$$

Однако это не все. Действительно, следующие комбинации лоренцевых генераторов также оставляют $\mathbf{p}_n$ инвариантными

$$L_{+\mathbf{i}} := L_{0\mathbf{i}} + L_{1\mathbf{i}} \tag{14.3}$$

Задача 14.1. Убедиться . **Подсказка:** используйте, что

$$\eta_{++} = \frac{\partial x^m}{\partial x^+}\frac{\partial x^n}{\partial x^+}\eta_{mn} = 0\,, \qquad x^+ := x^0 + x^1\,.$$

Генераторы $L_{+\mathbf{i}}$ совместно с $L_{\mathbf{ij}}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[L_{\mathbf{ij}}\,, L_{+\mathbf{k}}] = -i(\delta_{\mathbf{jk}} L_{+\mathbf{i}} - \delta_{\mathbf{ik}} L_{+\mathbf{j}})\,. \tag{14.4}$$

$$[L_{+\mathbf{i}}\,, L_{+\mathbf{j}}] = 0\,. \tag{14.5}$$

Задача 14.2. Убедиться, что это алгебра Ли $iso(d-2)$ движений $d-2$-мерного эвклидового пространства.

В этой интерпретации $L_{+\mathbf{i}}$ играют роль генераторов трансляций.

Таким образом, в безмассовом случае V_p должно образовывать неприводимый унитарный модуль $iso(d-2)$. Имеется однако математическая теорема, утверждающая, что унитарные представления $iso(d-2)$ либо бесконечномерны либо на них операторы сдвигов действуют тривиально. Вигнер рассмотрел оба случая. Первый тип представлений называется представлениями *бесконечного спина* (иногда *непрерывного спина*), а второй представлениями конечного спина. Последний описывает безмассовые поля с конечным числом компонент и представляет наибольший интерес, хотя в последние несколько лет поля бесконечного спина стали активно обсуждаться в литературе.

Задача 14.3. Убедитесь, что если генераторы $L_{+\mathbf{i}}$, играющие роль генераторов трансляций, действуют нетривиально, то представление бесконечномерно.

Таким образом, ограничиваясь случаем конечно-компонентных полей, мы требуем, чтобы генераторы $L_{+\mathbf{i}}$ действовали тривиально, т.е. чтобы импульсы в соответствующем евклидовом пространстве действовали нулем. Этот случай как раз отвечает вырожденной орбите группы вращений с нулевым импульсом $L_{+\mathbf{i}}$.

В результате, мы заключаем, что различные типы безмассовых полей конечного спина классифицируются по различным типам $o(d-2)$-модулей. Несколько огрубляя терминологию, $o(d-2)$ часто называют *безмассовой алгеброй Вигнера.*

Рассмотрим пример безмассового поля спина 1 - электродинамика Максвелла. Уравнения на безмассовое векторное поле A_n имеют вид аналогичный массивному случаю

$$\Box A^n = 0\,, \qquad \partial_n A^n = 0\,. \tag{14.6}$$

Но есть и существенное отличие. Если в массивном случае эти уравнения описывали неприводимое представление алгебры Пуанкаре, то в безмассовом это не так.

Пространство решений $D_{0,1}$ содержит подмодуль $D_{0,0}$ изоморфный пространству решений безмассового скалярного поля. Действительно. Пусть $\phi(x)$ удовлетворяет безмассовому уравнению КГФ

$$\Box\phi(x) = 0\,. \tag{14.7}$$

Тогда векторное поле вида

$$A_n(x) = \partial_n\phi(x) \tag{14.8}$$

также удовлетворяет уравнениям (14.6).

Задача 14.4. Убедиться.

Ясно, что поля такого вида образуют Пуанкаре-модуль.

Неприводимым модулем является фактор-модуль $D_{0,1}/D_{0,0}$. Иными словами, решения уравнения (14.6), отличающиеся на элементы $D_{0,0}$, считаются эквивалентными

$$A_n(x) \simeq A_n(x) + \partial_n\phi(x)\,, \qquad \Box\phi(x) = 0\,. \tag{14.9}$$

Такая эквивалентность присуща безмассовым полям и называется *калибровочной инвариантностью.* Математически, случай калибровочных симметрий отвечает случаю неразложимых модулей в которых подмодули отвечают калибровочным степеням свободы, а фактор-модули - физически наблюдаемым полям.

Задача 14.5. Разобрать структуру модуля на примере безмассового поля на спина 1.

Как же проявляется малая группа $o(d-2)$ в терминах полей? Рассмотрим Фурье-образ $\tilde{A}_n(p)$. Пусть импульс имеет вид (14.1). Тогда условие поперечности дает

$$A_- := A_0(p) - A_1(p) = 0\,. \tag{14.10}$$

Задача 14.6. Проверить

В результате, остаются следующие компоненты поля A_n

$$A_+ := A_0(p) + A_1(p)\,, \qquad A_{\mathbf{i}}\,, \qquad \mathbf{i} = 1, \dots d-2\,. \tag{14.11}$$

Но компонента A_+ является чисто калибровочной

Задача 14.7. Убедиться

и должна быть отфакторизована (т.е. не описывает физических степеней свободы). В результате, физические степени свободы описываются векторными компонентами $A_{\mathbf{i}}$, которые как раз и реализуют векторное представление безмассовой алгебры $o(d-2)$.

Нетривиальные компоненты безмассовых полей лежат в плоскости ортогональной направлению движения (в рассматриваемом случае (14.1) это x_1).

В случае четырехмерного пространства, это означает, что безмассовое поле спина один (поле Максвелла) имеет две поляризации. Определенному выбору поляризации, отвечает поляризованный свет. Отмечу, что массивное поле спина 1 имеет три поляризации - две поперечных и одну продольную.

Задача 14.8. Почему безмассовые поля не имеют продольных поляризаций?

Другие безмассовые поля описываются аналогично. Уравнения совпадают с массивными при $m = 0$, но за счет калибровочных симметрий часть степеней свободы пропадает в соответствии с классификацией Вигнера.

Задача 14.9. Проанализировать случай безмассового поля спина 2 (гравитона) и определить число независимых поляризаций гравитационного поля в четырехмерном пространстве Минковского.

Таким образом, элементарные частицы классифицируются по представлениям ортогональных групп (алгебр). Мы знакомы с векторным представлением $O(n)$. Из него с помощью конструкции тензорного произведения строятся тензорные представления. Но оказывается, что не все $O(n)$-модули строятся таким образом. Есть еще спинорные модули, в терминах которых описываются частицы полуцелых спинов, начиная со спина $1/2$, которые в физику ввели Паули и Дирак. К этому классу элементарных частиц относятся электрон, мюон, нейтрино, кварки и другие частицы. Чтобы понять как они описываются, нам придется познакомиться с понятием алгебры Клиффорда, которая является важнейшим математическим объектом с большим числом приложений как в физике, так и математике. К изучению алгебр Клиффорда мы перейдем в начале следующего семестра.