Фундаментальные симметрии физических теорий

М.А. Васильев

Весна 2019

Образовательная программа Теория фундаментальных взаимодействий и квантовая гравитация

1 Лекция 1. Вводная (ознакомительная) 1 курс, 2 семестр 14 Февраля 2019

Задача этой лекции - обсудить основные цели обучения в рамках нашей образовательной программы.

Куда и как будем двигаться.

Понять, что вы хотите и как это соответствует нашей программе. Оценить уровень вашей подготовки. Ответить на вопросы.

1. Прежде всего наше направление относится к теорфизике. Это предполагает углубленное изучение физики и математики.

2. В теоретической физике имеются проблемы, ориентированные по классификации Ландау на исполнителей и композиторов. Очень приблизительно, первые решают конкретные задачи в рамках сложившихся конструкций (теорий), а вторые занимаются развитием фундаментальной теории. Ландау себя считал исполнителем. Наша программа связана скорее с развитием фундаментальной теории, хотя четкое разделение на исполнителей и композиторов, конечно, невозможно.

Вопрос: в какой мере физика сегодня является завершенной наукой?
Какие проблемы остаются нерешенными?
Давайте вначале обсудим, какие проблемы были решены 100 лет назад.

1.1 Два облака

В начале прошлого века Лоренцем, Эйнштейном, Пуанкаре и другими была создана специальная теория относительности (СТО - 1905 г.), которая возникла в результате разрешения парадокса теории света Максвелла, утверждающей, что скорость света не зависит от системы отсчета. Этот факт был проверен Майкельсоном и Морли.

Кто знаком со специальной теорией относительности?

Чему равна скорость света?

В конце 19 - начале 20 веков Планком, Бором, Гайзенбергом, Шредингером, Дираком и другими была создана квантовая механика. Стимулом для ее создания послужил другой парадокс, разрешенный Планком: ультрафиолетовая катастрофа - бесконечность полной энергии излучения абсолютно черного тела, предсказываемая классической физикой.

В результате, появились две теории, лежащие, вместе с теорией Максвелла в основе всей современной физики.

Интересно, что прямо перед их созданием у крупнейших ученых доминировало представление, что физика в основном закончена. Так великий математик Гильберт, внесший, кстати говоря, большой вклад в развитие физики, поставил в 1900 г проблему аксиоматизации физики (шестая проблема Гильберта), а лорд Кельвин в том же году также говорил, что физика близка к завершению, если отвлечься от двух облаков, связанных с опытом Майкельсона-Морли и ультрафиолетовой катастрофой. (Попал в десятку!) Интересно, что Планку не советовали изучать физику, поскольку в ней, по мнению советовавшего, все уже сделано.

1.2 Современная ситуация

А что же сейчас? Опять "все сделано"? Конечно нет. И не только в приложениях.

Какие фундаментальные проблемы остаются нерешенными?

Прежде всего это проблема квантовой гравитации, обозначенная в названии нашей образовательной программы. Иными словами два облака Лорда Кельвина не исчезли, а слились в совсем уж маленькое облачко на горизонте физики. До сих пор попытки проквантовать гравитацию не увенчались успехом, приводя к неконтролируемым расходимостям (бесконечностям). Поскольку проблеме уже около ста лет, можно ожидать, что косметическими средствами здесь не обойтись и решение этой проблемы должно привести к существенной перестройке фундаментальных физических принципов и концепций как пространства-времени (теории гравитации Эйнштейна), так и квантовой механики, что делает проблему исключительно интересной и важной. Определенный шаг в этом направлении сделан в теории суперструн.

Есть, конечно, и другие важные нерешенные проблемы в физике. Например, проблема темной энергии.

Проблема квантовой гравитации осложняется тем, что относится к сверхвысоким энергиям

$$M_P := \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 10^{19} GeV \sim 10^{-8} Kg \tag{1.1}$$

или, что эквивалентно, сверхмалым расстояниям

$$L_P = 10^{-33} cm \tag{1.2}$$

В прямых современных экспериментах таких как на большом адронном коллайдере в ЦЕРНе, речь идет о гораздо меньших энергиях порядка $10^3 - 10^4 Gev$.

В связи с этим имеется точка зрения, что теория квантовой гравитации если и будет построена, то вряд ли будет иметь приложения. Наивность такой точки зрения хорошо иллюстрируется на примере специальной теории относительности. Действительно, в последней речь идет о скоростях сравнимых со скоростью света $c \sim 300000 km/sec$ многократно превышающих привычные нам скорости порядка 100 км/час. Наивно можно было бы ожидать, что поправки v/c будут исчезающе малыми и эффекты СТО не могут представлять большого интереса. В действительности, картина оказалась прямо противоположной благодаря знаменитой формуле Эйнштейна

$$E = mc^2 \,, \tag{1.3}$$

содержащей квадрат скорости света в числителе. Приложения этого следствия новой теории последовали незамедлительно от теории Дарвина до новых источников энергии и вооружений.

Мы не знаем пока, какие следствия будет иметь построение теории квантовой гравитации. Но интерес физики (и науки вообще) состоит в ее непредсказуемости, как это уже было неоднократно продемонстрировано в истории науки. Так что проблема эта как минимум очень интересна. Единственная сложность - не очень понятно как к ней подступиться по-серьезному. Одна из наиболее многообещающих возможностей связана с изучением симметрий.

1.3 Симметрии

Интуитивно, симметрия это когда Вы что-то преобразуете, а тот или иной объект остается неизменным. Это может быть что угодно: геометрический объект, форма уравнений, функция и т.д.

Какие примеры симметрий Вам приходят в голову?

Математически, симметрии образуют группы преобразований. Кому знакомо это понятие? Мы обсудим его более подробно следующий раз. Сейчас замечу только, что группы бывают конечные (с конечным числом элементов), бесконечные и непрерывные. В последних не просто бесконечное число элементов, но их континуум: разные элементы отвечают разным вещественным числам. Кто может привести примеры?

Все современные физические теории основаны на определенных симметриях. Это относится к теории электромагнетизма Максвелла (группа Пуанкаре и группа $U(1)$), Стандартной модели электро-слабых и сильных взаимодействий ($U(1) \times SU(2) \times SU(3)$), гравитации Эйнштейна (диффеоморфизмы: принцип эквивалентности Эйнштейна), теории Суперструн (конформная симметрия), Супергравитации (суперсимметрия) и др., которые, в конечном счете, и определяют их свойства, освобождая от недостатков, присущих менее симметричным моделям.

Симметрии физических теорий обладают важным свойством: при переходе к более высоким энергиям симметрии увеличиваются (восстанавливаются). Тут есть вполне житейские аналогии. Например, когда Вы быстро едете на поезде через ровное поле, отдельных травинок Вы не видите и поле кажется

Вам совершенно ровным (однородным). Этот пример является совершенно общим. Например симметрия $U(1) \times SU(2)$ нарушается Бозоном Хиггса с массой $M_H = 125$. Ниже этого масштаба симметрия не видна, а выше, когда массой M_H можно пренебречь, она восстанавливается. (Отличие от примера с травой не принципиальное.)

Можно предположить, что при переходе к более и более высоким энергиям, симметрии будут становиться все больше и больше. Интересно понять, а какие вообще существуют теории с высшими симметриями. Оказывается, что таких теорий совсем немного, и можно предположить, что они-то и описывают режим, отвечающий квантовой гравитации. Соответствующие симметрии называются симметриями высших спинов, а теории - теориями высших спинов или гравитацией высших спинов. Эта теория совершенно современна и активно изучается в настоящее время. Ожидается, что она позволит прояснить старый вопрос о скрытых симметриях теории суперструн. Это очень горячий сюжет и кто хочет в этом поучаствовать должен не зевать. ФИАНовская группа является одним из лидеров этого направления в мире.

1.4 Пространство-время

Понятие пространства-времени теснейшим образом связано с симметриями. При этом эта связь, может быть весьма нетривиальной. Например суперструны требуют десятимерного пространства, а максимально симметричная супергравитация - одиннадцатимерного. Конформная симметрия позволила связать физику конформных теорий в d измерениях с теорией гравитации в $d+1$-мерном пространстве анти Де Ситтера: гипотеза Малдасены об AdS_{d+1}/CFT_d соответствии (1998 год).

Интересно, что AdS_{d+1}/CFT_d позволила связать теорию (гравитацию) высших спинов в четырех измерениях с моделью магнетика в трех-мерном пространстве. Эти результаты обеспечивают совершенно неожиданные приложения и даже проверку (квантовой) гравитации в настольных экспериментах (Giombi, Yin (2009)). Исходя из теории высших спинов были предсказаны свойства моделей магнетиков (трехмерной сигма-модели), которые только после этого были установлены (трехмерная бозонизация).

1.5 Частицы и поля

Различные частицы характеризуются массой m и спином s, характеризующими тип представления релятивистской симметрии (группы Пуанкаре). Масса m - непрерывный параметр, а спин - целый и полуцелый: $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2 \ldots$

Поля (частицы) материи обладают спином $s = 1/2$ (e, μ, u, d,...) или 0 (бозон Хиггса H).

Переносчики взаимодействий описываются векторными бозонами $\gamma, g, W^{\pm}, Z$. Все они имеют спин $s = 1$. Свойства этих полей, лежащие в основе Стандартной модели, в значительной мере определяются ассоциированными с ними симметриями.

Кроме того, гравитационное взаимодействие переносится частицей спина 2, гравитоном. Недавнее обнаружение гравитационных волн обеспечило экспериментальную проверку их существования. Масса гравитона, как и фотона, равна нулю. Это совершенно не случайно и связано, как мы увидим позднее, опять-таки с симметриями теории.

Все частицы Стандартной модели имеют массы, не превышающие 10^4 Гэв. Про частицы более высоких масс мы мало что знаем, поскольку их не удается наблюдать экспериментально (не хватает энергии, чтобы их родить).

Супергравитация - это теория, содержащая пока гипотетические частицы спина 3/2.

Теория высших спинов, как и теория суперструн, содержит поля высших спинов $s > 2$.

Переносчики взаимодействий описываются полями нулевой массы как фотон или массивными полями, приобретающими массу за счет механизма Хиггса.

Теория высших спинов содержит только безмассовые поля высших спинов. Теория суперструн - массивные. Старый вопрос - каковы ненарушенные симметрии теории струн и каков механизм их нарушения аналогичный механизму Хиггса? К решению этой задачи только недавно удалось подойти вплотную в рамках теории высших спинов.

1.6 Методы

Методы решения задач в теории высших спинов требуют современных математических конструкций, а иногда и развития новых. С другой стороны, речь идет о построении физической теории и изучении ее свойств. Поэтому, чтобы заниматься этим направлением необходима солидная подготовка как по физике, так и по математике, которая обеспечивается нашей образовательной программой. Ведение в основные концепции и понятия будет дано в этом курсе, что, надеюсь, поможет Вам сориентироваться.

1.7 Примерный план

Курс включает сведения как из математики:

группы, алгебры Ли, алгебры Клиффорда, элементы теории представлений, теория спиноров, внешнюю алгебру дифференциальных форм, элементы дифференциальной геометрии, элементы суперматематики в суперпространстве, и другие

так и из физики:

симметрии эвклидова пространства и пространства Минковского, примеры релятивистских уравнений, теория Янга-Миллса, суперсимметрия и суперсимметричные модели. Конформная симметрия, алгебра Вирасоро как симметрия теории струн, и симметрии высших спинов. Формулировка Общей теории относительности в терминах дифференциальных форм. Дальнейшие перспективы.

После занятий предполагается проведение семинаров по решению задач (Анатолий Корибут).

Предполагается, что к концу курса успешные студенты будут обладать подготовкой достаточной для начала научных исследований в актуальных направлениях современной физики фундаментальных взаимодействий.

1.8 Литература

А.П.Исаев, В.А.Рубаков, Теория групп и симметрий: Конечные группы. Группы и алгебры Ли,
http://ffmgu.ru/images/c/c9/Isaev_Teoria_Grupp_I_Simmetriy.pdf

С.П.Новиков, Тайманов, СОВРЕМЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ПОЛЯ

2 Лекция 2.
1 курс, 2 семестр 21 Февраля 2019

2.1 Группы преобразований

Основным понятием, которое будет снова и снова появляться в наших лекциях, является симметрия. Сегодня я напомню основные математические понятия, которые необходимы для этого.

Пусть задано некоторое множество M (конечное или бесконечное). Рассмотрим некоторую совокупность обратимых преобразований $g:\quad M \xrightarrow{g} M$с тождественным преобразованием e. Преобразование обратное к g обозначается g^{-1}.

Задача 2.1. Доказать, что преобразование g взаимно однозначно.

Определим композицию преобразований как последовательное применение

$$(g_1 \circ g_2)(m) := g_1(g_2(m)) \quad \forall m \in M\,. \tag{2.1}$$

При таком определении ассоциативность очевидна:

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) \tag{2.2}$$

Задача 2.2. Доказать.

Обратный элемент: $g^{-1} \circ g = e$.

Задача 2.3. Доказать, что $g \circ g^{-1} = e$, $e \circ g = g \circ e = g$.

Определение абстрактной группы: Множество элементов g образует группу G с произведением $\circ$, если оно замкнуто относительно операции произведения $\circ$, $g_1 \circ g_2 \in G \quad \forall g_{1,2} \in G$, и удовлетворяет аксиомам группы.

Задача 2.4. Сформулировать аксиомы группы.

Группы бывают абелевы (коммутативные): $f \circ g = g \circ f \quad \forall f, g \in G$ и неабелевы.

2.2 Инварианты и орбиты

Пусть группа G действует на множестве M. Функция $I(m), m \in M$ на M (со значениями где угодно) называется (G-) инвариантной, если

$$I(g(m)) = I(m)\,, \qquad \forall\ g \in G, m \in M\,. \tag{2.3}$$

Подмножество $M' \subset M$ называется инвариантным, если $G(M') \subset M'$

Задача 2.5. Убедиться, что действие группы G задает отношение эквивалентности на M по правилу

$$g(m) \sim m\,, \qquad \forall g \in G\,. \tag{2.4}$$

Определение: классы эквивалентности образуют орбиты группы в M.

Задача 2.6. Дать определение отношения эквивалентности и классов эквивалентности.

Примером множества инвариантного относительно G может служить сама группа G. При этом действие G на себе может быть задано тремя неэквивалентными способами.
Левое действие $g(f) := g \circ f$
Правое действие $g(f) := f \circ g^{-1}$
Присоединенное действие $g(f) := g \circ f \circ g^{-1}$

Задача 2.7. Убедится, что все три операции задают действие группы на себе.

Задача 2.8. Убедится, что по отношению к левому и правому действию G не содержит инвариантных подмножеств кроме всей G.

По отношению к присоединенному действию группа может содержать инвариантные подмножества $M \subset G$. Такие подмножества называются классами сопряженных элементов. Вообще говоря, они могут не образовывать подгрупп G. Тривиальный класс E образован единичным элементом e.

Определение: Любая *собственная* инвариантная подгруппа $H \neq E, G$ называется *нормальным делителем* G.

Определение: Группа G называется *простой*, если не содержит нетривиальных нормальных делителей.
Простые группы образуют важный класс, допускающий полную классификацию в конечном и конечномерном случае (Картан).

Пусть H - некоторая подгруппа G. Очевидно G инвариантно относительно левого действия $H: \quad h(g) = h \circ g$. Множество орбит H в G - пространство классов смежности (фактор-пространство, косет) G/H. Для произвольной подгруппы $H \subset G$, G/H не обладает групповой структурой. Но если H нормальный делитель, G/H наделяется групповой структурой.

Задача 2.9. Доказать.

2.3 Примеры

- Группа корней степени N из 1: *циклическая группа* Z_N
- Целые числа по сложению: Z.
- Группа перестановок N элементов: *симметрическая группа* S_N
- Рациональные числа $\mathbb{Q}$ по сложению
- Вещественные числа по сложению: R
- Группа невырожденных матриц $n \times n$: GL_n

$$A_i^j\,, \qquad i, j = 1, \ldots n\,, \qquad \det A_i^j \neq 0\,. \tag{2.5}$$

- Группа матриц $n \times n$ с единичным детерминантом: SL_n

Задача 2.10. Как определяется произведение матриц?

Группы бывают *конечные* (с конечным числом элементов) и *бесконечные* (с конечным числом элементов)

Задача 2.11. Какие из перечисленных групп конечны и бесконечны?

Число элементов группы G называется ее порядком $|G|$ $(ord(G))$. В случае бесконечных групп порядком называется их мощность как множества.

Задача 2.12. Каковы порядки перечисленных групп?

Среди бесконечных (континуальных) групп выделенную роль играют непрерывные группы и их наиболее важный подкласс групп Ли. В этом случае говорят о *размерности* группы как о числе непрерывных координат, которые необходимо задать для определения элемента группы.

Задача 2.13. Какие из перечисленных групп непрерывны?

Задача 2.14. Каковы размерности R, GL_n, SL_n?

2.4 Линейная алгебра

Задача 2.15. Дать определение поля и линейного пространства.

Базис: $\{e_i \in V\}$

$$\forall x \in V : \, x = \sum_i x^i e_i \,, \qquad x^i \in \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \,, \qquad x = 0 \to x^i = 0 \tag{2.6}$$

Правило суммирования Эйнштейна: $\sum_i x^i e_i \Rightarrow x^i e_i$

Подпространство $W \subset V$ это подмножество V, которое само имеет структуру линейного пространства.

Фактор-пространство V/W это пространство классов эквивалентности

$$v \sim v + w \quad \forall w \in W \,. \tag{2.7}$$

Задача 2.16. Доказать, что это действительно порождает отношение эквивалентности.

Задача 2.17. Доказать, что V/W обладает структурой линейного пространства.

Алгебра A это линейное пространство, снабженное операцией произведения

$$\forall a, b \in A \,, \qquad ab \in A \tag{2.8}$$

такой, что

$$(\lambda a + \mu b)c = \lambda ac + \mu bc \,, \qquad c(\lambda a + \mu b) = \lambda ca + \mu cb \,, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K} \,. \tag{2.9}$$

Алгебры бывают
Ассоциативные и нет
Коммутативные $ab = ba$ и некоммутативные
Унитальные (с единичным элементом e) и нет.

$$e \in A: \qquad ea = ae = a\,, \quad \forall a \in A \tag{2.10}$$

Комплексные матрицы $n \times n$ образуют алгебру $Mat_n(\mathbb{C})$ по отношению к матричному произведению.

Задача 2.18. Как определяется структура линейного пространства в алгебре матриц?

Задача 2.19. Какими свойствами обладает алгебра $Mat_n(\mathbb{C})$?

Еще пример: алгебра функций $f(x)$. Какие функции?
Подалгебра $B \subset A$: подмножество которое само является алгеброй.

3 Лекция 3.
1 курс, 2 семестр, 28 Февраля 2019

3.1 Алгебра - продолжение

Понятие *групповой алгебры.*

Пусть G - конечная группа. $A(G)$ - групповая алгебра, которая по определению состоит из элементов векторного пространства

$$\sum_i \lambda^i g_i \,, \qquad \lambda_i \in \mathbb{K} g_i \quad \in G \,. \tag{3.1}$$

Здесь g_i перечисляют все элементы G, которые считаются линейно независимыми. Произведение базисных элементов g_i в $A(G)$ задается групповым законом композиции

$$g_i \circ g_j = f_{ij}^k g_k \,, \tag{3.2}$$

где f_{ij}^k удобно считать равным единице, если $g_k = g_i \circ g_j$ нулем в остальных случаях.

Задача 3.1. Какими свойствами обладает групповая алгебра?

Задача 3.2. В чем отличие понятий ассоциативной алгебры и группы?
Чем отличается алгебра матриц $Mat_n(\mathbb{C})$ от группы матриц $GL_n(\mathbb{C})$?

Линейное пространство $I \in A$ называется *левым идеалом* A если

$$ai \in I \,, \qquad \forall i \in I, a \in A \tag{3.3}$$

Правый идеал определяется аналогично по отношению к правому умножению на $a \in A$.

Идеал I называется *двусторонним*, если он является одновременно левым и правым. Понятие двустороннего идеала в алгебре аналогично понятию нормальной подгруппы в группе. Фактор пространство A/I образует алгебру.

Задача 3.3. Доказать.

Замечание: Для коммутативных алгебр понятия левого, правого и двустороннего идеалов совпадают.

Рассмотрим пример алгебры A бесконечно дифференцируемых функций одной переменной $f(x)$. Рассмотрим идеал (какой?) I_n, образованный функциями вида $\tilde{f}(x) = x^n f(x)$.

Задача 3.4. Доказать, что I_n образует идеал.

Задача 3.5. Что за алгебра A/I_n? Допускает ли интерпретацию в терминах групповой алгебры?

3.2 Многообразия и их размерность

$\mathbb{R}^n$ - n-мерное векторное пространство $\{x^1, x^2, \dots x^n\}$. x^i с $i = 1, \dots n$ называются координатами $\mathbb{R}^n$. По определению, $\dim \mathbb{R}^n = n$. В общем случае многообразие локально (т.е., в окрестности любой точки) устроено так же как $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим подпространство $\mathbb{R}^n$, выделяемое p уравнениями

$$x^1 = 0\,, \dots\,, x^p = 0\,. \tag{3.4}$$

Очевидно, это $\mathbb{R}^{n-p}$, а его размерность есть $n-p$. Этот факт оказывается совершенно общим: если координаты многообразия размерности n ограничить p уравнениями, обладающими определенными свойствами гладкости и невырожденности (например, не надо накладывать одно и то же уравнение дважды), то получится многообразие размерности $n-p$. Оказывается, любое многообразие может быть вложено в $\mathbb{R}^n$ достаточно большой размерности. Например, n-мерная сфера S^n задается одним уравнением

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = R^2 \tag{3.5}$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$. По определению, S^n имеет размерность n.

В общем случае, условие, что система p уравнений в $\mathbb{R}^n$

$$f^\alpha(x) = 0\,, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, p\,, \qquad p \le n \tag{3.6}$$

описывает многообразие M размерности $n-p$, есть

$$rank \Big| \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^i} \Big| = p\,, \qquad \forall x \in M\,. \tag{3.7}$$

Замечание: уравнение сферы нулевого радиуса не удовлетворяет условию невырожденности, описывая одну точку $x^i = 0$.

Точное определение понятия гладкого многообразия дается в курсе дифференциальной геометрии.

Материал, этой и предыдущей лекций, содержит набор понятий, терминов и фактов, необходимых для изучения симметрий физических систем. Эти лекции в дальнейшем можно использовать как справочник.

3.3 Нерелятивистские симметрии

Начнем со школьной физики. Второй закон Ньютона имеет вид.

$$m\, \ddot{x}^{\,i}(t) = F^i(x(t))\,, \tag{3.8}$$

где $x^i(t)$ - координаты частицы массы m в момент времени t. Как обычно, точка обозначает дифференцирование по времени

$$\dot{a} := \frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{3.9}$$

$F(x)$ - сила, действующая на частицу в точке x.

Начнем со случая нулевой внешней силы

$$m\,\ddot{x}^{\,i}(t) = 0\,. \qquad (3.10)$$

В этом случае общее решение динамических уравнений имеет вид

$$x^i(t) = x_0^i + v^i t\,, \qquad (3.11)$$

выражающий первый закон Ньютона: свободная частица движется прямолинейно и равномерно.

Каковы симметрии уравнения Ньютона с $F^i = 0$? Эквивалентно, какие преобразования переводят решение в решение?

- Сдвиги пространства на постоянный вектор a^i:

  $$x^i(t) \to x'^i(t) = x^i(t) + a^i\,, \qquad \dot{a}^i = 0\,. \qquad (3.12)$$

  На решениях

  $$x_0^i \to x_0^i + a^i\,. \qquad (3.13)$$

- Сдвиги времени

  $$t \to t + T\,, \qquad x(t) \to x(t+T): \qquad x_0^i \to x_0^i + Tv^i\,. \qquad (3.14)$$

  Хотя эти преобразования похожи по форме на сдвиги пространства, отличие в том, что величина сдвига зависит от скорости частицы, т.е. различна для разных частиц.

- Переход к другой инерциальной системе, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью u

  $$x^i(t) \to x^i(t) + u^i t\,. \qquad (3.15)$$

  Очевидно, на решениях (3.11) это дает нерелятивистский закон сложения скоростей

  $$v^i \to v^i + u^i\,. \qquad (3.16)$$

  Все перечисленные преобразования входят в группу Галилея.

  Задача 3.6. Проверить, что они действительно образуют группу.

А что еще мы не рассмотрели?

Очевидно, уравнения (3.10) переходят в себя при линейных преобразованиях

$$x^i(t) \to A^i{}_j x^j(t) \qquad (3.17)$$

с произвольной постоянной невырожденной матрицей $A^i{}_j$, $\det A^i{}_j \neq 0$.

Задача 3.7. Какую группу образуют эти преобразования?

Пусть G - группа всех перечисленных преобразований.

Задача 3.8. Содержит ли G нетривиальные нормальные делители? Если да, то какие? Что будет минимальной фактор-группой G/N?

Совокупность симметрий уравнений свободного движения G выходит за рамки группы Галилея.

Задача 3.9. В чем отличие?

Например G содержит подгруппу растяжений с $A^i{}_j = a\delta^i_j$, где $a \neq 0$, а δ^i_j как обычно обозначает единичную матрицу. Очевидно, при таких преобразованиях

$$x^i(t) \to ax^i(t)\,. \tag{3.18}$$

Такие преобразования называются *дилатациями*. Они входят в группу *конформных преобразований*, которая проявляется при высоких энергиях и при изучении фазовых переходов.

В действительности группа симметрий свободных уравнений частицы еще больше. Например, в нее входят растяжения времени.

Задача 3.10. Определить их действие.

В группу Галилея входит лишь подгруппа трехмерных вращений и отражений $O(3) \subset GL(3)$. Чтобы в этом разобраться, на следующей лекции мы рассмотрим более реалистическую ситуацию со взаимодействующими частицами.

Задача 3.11. Вычислить размерность группы Галилея.

Рассмотренный пример иллюстрирует весьма общее явление: симметрии *свободных* динамических систем обычно ниже, чем симметрии систем со *взаимодействием* (силами). В рассмотренном случае группа $GL(3)$ редуцируется до своей подгруппы $O(3)$.

Задача 3.12. Чему равен аналог группы $GL(3)$ для N свободных (невзаимодействующих) частиц?

4 Лекция 4.
1 курс, 2 семестр, 7 Марта 2019

4.1 Нерелятивистские симметрии - продолжение

Сегодня продолжим рассмотрение симметрий нерелятивистских систем частиц, перейдя к уравнениям взаимодействующих частиц. Для этого вспомним, как взаимодействуют точечные частицы в нерелятивистской (ньютоновской) гравитации или заряженные частицы в электростатике.

Пусть разные частицы занумерованы индексом $\alpha, \beta = 1, \ldots, N$. Тогда силы между парой частиц с номерами α и β в электростатике и нерелятивистской теории тяготения имеют вид

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = -\frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\varepsilon_a |x_\alpha - x_\beta|^3}(x^i_\alpha - x^i_\beta)\,, \qquad |x_\alpha - x_\beta| := \sqrt{\sum_k (x^k_\alpha - x^k_\beta)^2}\,. \tag{4.1}$$

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = \frac{m_\alpha m_\beta}{|x_\alpha - x_\beta|^3}(x^i_\alpha - x^i_\beta)\,. \tag{4.2}$$

Еще один известный вам тип сил отвечает частицам, связанным пружинкой:

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = k(x^i_\alpha - x^i_\beta)\,. \tag{4.3}$$

Уравнения движения для частицы с номером α имеют вид

$$m\,\ddot{x}\,^i_\alpha(t) = \sum_{\beta\neq\alpha} F^i_{\alpha\beta}((\vec{x}_\alpha(t) - \vec{x}_\beta(t)))\,, \tag{4.4}$$

Важным свойством всех этих уравнений является то, что величина силы зависит только от расстояния между частицами, а направление определяется вектором разности векторов их положений. Такие силы называются *центрально симметричными.* Поскольку расстояние между точками инвариантно относительно поворотов, то уравнения взаимодействующих частиц инвариантны относительно подгруппы группы $GL(3)$, которая не меняет расстояний. Эта группа называется *ортогональной группой* $O(3)$.

Задача 4.1. Убедиться, что преобразования (3.12)-(3.15) по-прежнему задают симметрии уравнений (4.4).

В совокупности с $O(3)$ эти преобразования задают группу Галилея в трехмерном пространстве, являющуюся фундаментальной симметрией нерелятивистской физики. Чему равна размерность группы Галилея?

Прежде чем заняться более детальным изучением ортогональных групп сделаю следующее важное замечание.

Симметрия уравнений (4.1) и (4.2) выше, чем группа Галилея. Действительно, кроме преобразований из группы Галилея, эти уравнения инвариантны относительно растяжений

$$x^i_\alpha \to \lambda x^i_\alpha\,, \qquad t \to \mu t\,, \tag{4.5}$$

если параметры растяжений λ и μ связаны определенным образом.

Задача 4.2. Найти как связаны λ и μ.

Забегая вперед скажу, что это не случайно: уравнения электродинамики и (линейной) гравитации обладают конформной симметрией из-за того, что электромагнитное и гравитационное поля безмассовы - распространяются со скоростью света.

Уравнения (4.3) также обладают дополнительной симметрией.

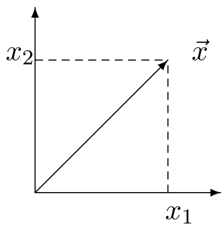
Задача 4.3. Найти какой.

Это также не случайно, и связано с *интегрируемостью* (точной решаемостью) системы (4.3). Но если в системе присутствуют силы обоих типов (например, упругие и электростатические), то конформная симметрия исчезает (нарушается).

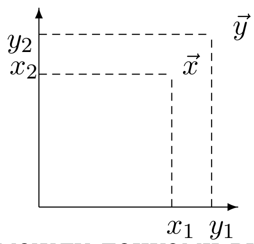
4.2 Движения эвклидового пространства

Рассмотрим двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$. Точки плоскости задаются векторами $\vec{x}$

$\mathbb{R}^2$



Пусть заданы две точки $\vec{x}$ и $\vec{y}$.



Расстояние между точками вычисляется по теореме Пифагора

$$l^2 := (y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 \,. \tag{4.6}$$

Преобразования координат, сохраняющие расстояния, называются *движениями* плоскости. Имеется два типа движений.

1. Сдвиги

$$\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a} \,, \qquad \vec{y} \to \vec{y} + \vec{a} \,. \tag{4.7}$$

$\vec{a}$ - вектор сдвига. t_a - оператор сдвига.

$$t_a(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a} \,. \tag{4.8}$$

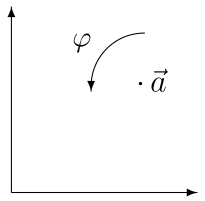
Сдвиги t_a образуют группу трансляций T^2. Мы уже встречали эту группу при анализе симметрий нерелятивистских уравнений. Эта группа абелева

$$t_a t_b = t_b t_a \tag{4.9}$$

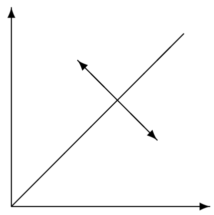
Задача 4.4. Следствием какого свойства векторов является этот факт?

Задача 4.5. Какое многообразие образует T^2? Какова его размерность?

2. Вращения $SO(2)$: $M_{a\varphi}$ - поворот на угол φ вокруг точки a.



3. Отражения относительно любой прямой



Аналогично, преобразования, не меняющие длин в $\mathbb{R}^n$, образуют группу движений евклидового пространства E^n. Такие преобразования допускают аналитическое представление

$$x^i \to x'^i = A^i{}_j x^j + a^i\,, \qquad i, j = 1, \dots n\,, \tag{4.10}$$

где a^i описывает сдвиг, а матрица $A^i{}_j$ - ортогональное преобразование при условии, что

$$A^i{}_k A^j{}_l \delta_{ij} = \delta_{kl} \tag{4.11}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование). Условие (4.11) буквально выражает условие инвариантности расстояния

$$l^2 := \delta_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j)\,. \tag{4.12}$$

Задача 4.6. Убедиться

Заметим, что единичная матрица δ_{ij} с двумя нижними индексами задает *метрику* евклидового пространства E^n в декартовых координатах.

4.3 Ортогональная группа

Матрицы $A^i{}_j$, удовлетворяющие условию (4.11), образуют *ортогональную группу* $O(n)$, если $i, j = 1, 2, \dots n$. Единичный элемент задается единичной матрицей $A^i{}_j = \delta^i{}_j$.

Задача 4.7. Убедиться, что единичная матрица удовлетворяет (4.11).

Задача 4.8. Проверить групповое свойство: матрица AB удовлетворяет (4.11), если A и B удовлетворяют (4.11).

Из условия (4.11) следует, что

$$(\det |A|)^2 = 1 \quad \to \quad \det |A| = \pm 1\,. \tag{4.13}$$

В частности, отсюда следует, что матрицы A, удовлетворяющие (4.11), обратимы.

В качестве примера ортогональной матрицы с детерминантом -1, можно взять матрицу $A^i{}_j$ с компонентами

$$A^1{}_1 = -1\,, \qquad A^n{}_n = 1\,, \qquad n \neq 1\,, \qquad A^n{}_m = 0\,, \qquad n \neq m\,. \tag{4.14}$$

Преобразование (4.10) исываетс такой матрицей $A^i{}_j$ и $a^i = 0$ дает преобразования

$$x^1 \to -x^1\,, \qquad x^n \to x^n\,, \qquad n \neq 1\,. \tag{4.15}$$

Иными словами, эта матрица описывает отражение оси x^1. Очевидно, для этой матрицы

$$\det A^i{}_j = -1\,. \tag{4.16}$$

Специальная ортогональная группа $SO(n)$, которая и описывает истинные вращения, состоит из матриц с единичным детерминантом

$$\det A = 1: \quad SO(n)\,. \tag{4.17}$$

Очевидно, $SO(n)$ - подгруппа $O(n)$. Преобразования из $O(n)$ $\det |A| = -1$ содержат отражения.

Задача 4.9. Убедиться, что такие преобразования не связаны непрерывным образом с единичным элементом $O(n)$. (Эквивалентно, не принадлежат *связной компоненте единицы* $O(n)$).

Теперь вычислим размерность $O(n)$, т.е. сколько независимых вращений в $O(n)$. Матрицы $A^i{}_j$ содержат n^2 компонент (т.е. могут рассматриваться как координаты в $\mathbb{R}^{n^2}$). Они подчинены уравнениям (4.11). В силу симметрии по индексам k, l (4.11) содержат $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений. Значит, в силу теоремы о неявной функции, размерность $O(n)$ равна

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\,. \tag{4.18}$$

Замечание. Условие невырожденности (3.7) несложно проверить: используя, что $O(n)$ - группа, его достаточно проверить при $A^i{}_j = \delta^i_j$ (сначала продифференцировать в (3.7), а потом положить $A^i{}_j = \delta^i_j$).

Задача 4.10. Найти $\dim SO(n)$.

Группа $O(n)$ состоит из двух непересекающихся кусков. Один из них - это $SO(n)$. А другой - той же размерности - образован матрицами с $\det |A| = -1$.

Размерность $SO(n)$ определяет число независимых поворотов. Очевидно, размерность $SO(n)$ совпадает с числом двумерных плоскостей, натянутых на орты в $\mathbb{R}^n$. Т.е. каждой такой плоскости отвечает свой поворот - поворот этой плоскости. Как и ожидалось, $\dim SO(3) = 3$.

Чтобы понять как решения уравнения (4.11) задают повороты и отражения, рассмотрим более подробно группу двумерных вращений $O(2)$. В этом случае, уравнения (4.11) дают

$$(A^1{}_1)^2 + (A^2{}_1)^2 = 1\,, \tag{4.19}$$

$$(A^2{}_2)^2 + (A^1{}_2)^2 = 1\,, \tag{4.20}$$

$$A^1{}_1 A^1{}_2 + A^2{}_1 A^2{}_2 = 0\,. \tag{4.21}$$

Первые два уравнения легко решить в виде

$$A^1{}_1 = \cos\varphi_1\,, \qquad A^2{}_1 = \sin\varphi_1 \tag{4.22}$$

$$A^2{}_2 = \cos\varphi_2\,, \qquad A^1{}_2 = \sin\varphi_2 \tag{4.23}$$

Последнее приобретает вид

$$0 = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\,. \tag{4.24}$$

Это уравнение имеет два решения

$$\varphi_2 = -\varphi_1 \tag{4.25}$$

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1 \tag{4.26}$$

Первое решение описывает поворот на угол φ_1, а второе - отражение.

Задача 4.11. Доказать. Вычислить детерминанты матрицы A^i_j в этих случаях. Найти отражение, описываемое уравнением (4.26).

Задача 4.12. Доказать, что уравнение (4.11) эквивалентно уравнению

$$A^i{}_k A^j{}_l \delta^{kl} = \delta^{ij}\,, \tag{4.27}$$

т.е., всякое решение (4.11) является решением (6.10) и наоборот.

5 Лекция 7. 1 курс, 2 семестр, 28 Марта 2019

5.1 Алгебры Ли и группы Ли

Алгебры Ли дают эффективный инструмент анализа симметрий путем анализа бесконечно малых симметрий.

Рассмотрим группу Ли G размерности n, т.е. G описывается n непрерывными координатами типа углов поворотов, сдвигов и т.п.. Пусть $g \in G$ элемент группы близкий к единичному, а ε^i бесконечно малые координаты координаты группы в окрестности единичного элемента. Например, ε^i может описывать бесконечно малый сдвиг или поворот.

Чтобы не погружаться в тонкости геометрии групп Ли удобно рассмотреть не группу Ли G, а ее произвольное представление T с элементами ${t_g}^\alpha{}_\beta$. В случае, когда они бесконечно близки к единице,

$$ {t_{g(\varepsilon)}}^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \varepsilon^i {t_i}^\alpha{}_\beta \,, \tag{5.1} $$

где δ^α_β - единичный оператор, а ${t_i}^\alpha{}_\beta$ - некоторый набор n матриц размерности $m \times m$, действующих в m-мерном G-модуле V

$$ t_i(e^\alpha) := {t_i}^\alpha{}_\beta e^\beta \,, \qquad \alpha, \beta = 1, \dots m \,. \tag{5.2} $$

ε^i - численные параметры, считающиеся бесконечно малыми. При этом, предполагается что любой элемент в инфинитезимальной окрестности единичного элемента может быть представлен в виде (5.1) с некоторыми ε^i.

Полезно рассмотреть члены до второго порядка малости, чтобы затем увидеть, что члены второго порядка вклада не дадут

$$ {t_{g(\varepsilon)}}^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta + \varepsilon^i {t_i}^\alpha{}_\beta + \varepsilon^i \varepsilon^j {s_{ij}}^\alpha{}_\beta + o(\varepsilon^2) \,. \tag{5.3} $$

Вычислим обратный элемент.

Задача 5.1. Убедиться, что

$$ {t_{g^{-1}(\varepsilon)}}^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta - \varepsilon^i {t_i}^\alpha{}_\beta - \varepsilon^i \varepsilon^j {s_{ij}}^\alpha{}_\beta + \varepsilon^i \varepsilon^j {t_i}^\alpha{}_\gamma {t_j}^\gamma{}_\beta + o(\varepsilon^2) \,. \tag{5.4} $$

Пусть g_1 и g_2 два элемента G близких к единичному. Рассмотрим следующий элемент

$$ g_{1,2} := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in G \,, \tag{5.5} $$

который также будет близок к единичному.

Пусть ε^i_1 и ε^i_2 инфинитезимальные координаты g_1 и g_2, соответственно. Вычислим

$$ t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}} \tag{5.6} $$

с точностью до членов второго порядка. Прямое вычисление довольно громоздко, но окончательный ответ оказывается простым и может быть легко получен с помощью простой леммы:

$$ (t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}})^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta \qquad \text{при} \quad \varepsilon_1 = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = 0 \,. \tag{5.7} $$

Задача 5.2. Доказать, учитывая, что $g(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = e$.
Стоит заметить, что выражение (5.5) было выбрано именно с таким расчетом, чтобы была выполнена лемма (5.7).

Из Леммы (5.7) следует, что все члены, содержащие только ε_1 или ε_2 сокращаются и, с точностью до членов старших порядков, остаются только члены, содержащие $\varepsilon_1\varepsilon_2$. Последние нетрудно вычислить. В частности, из Леммы (5.7) следует, что члены второго порядка по ε в (5.3) и (5.4) не дают вклада в рассматриваемом приближении, т.е. при вычислении достаточно использовать (5.1) и

$$t_{g^{-1}(\varepsilon)}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \varepsilon^i t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} + \dots \tag{5.8}$$

Поскольку ε_1 входит через g_1 и g_1^{-1}, то член линейный по ε_1 может появиться через одну из двух комбинаций $t_{g_1}t_{g_2}t_{g_2^{-1}}$ или $t_{g_2}t_{g_1^{-1}}t_{g_2^{-1}}$. Но так как $t_{g_1}t_{g_2}t_{g_2^{-1}} = t_{g_1}$, этот член зависит только от ε_1 и, следовательно, не дает вклада в окончательный ответ по Лемме (5.7). Таким образом, остается вычислить члены порядка $\varepsilon_1\varepsilon_2$ в $t_{g_2}t_{g_1^{-1}}t_{g_2^{-1}}$. Это дает два члена, в которые ε_2 приходит либо из первого, либо из последнего сомножителя. В результате, получаем

$$t_{g_1}t_{g_2}t_{g_1^{-1}}t_{g_2^{-1}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \varepsilon_1^i\varepsilon_2^j(t_i{}^{\alpha}{}_{\gamma}t_j{}^{\gamma}{}_{\beta} - t_j{}^{\alpha}{}_{\gamma}t_i{}^{\gamma}{}_{\beta}) + o(\varepsilon^3)\,. \tag{5.9}$$

Таким образом, показано что

$$t_{g_1}t_{g_2}t_{g_1^{-1}}t_{g_2^{-1}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \varepsilon_1^i\varepsilon_2^j[t_i\,,t_j]^{\alpha}{}_{\beta} + o(\varepsilon^3)\,, \tag{5.10}$$

где $[a\,,b]$ - коммутатор матриц

$$[a\,,b]^{\alpha}{}_{\beta} := (ab)^{\alpha}{}_{\beta} - (ba)^{\alpha}{}_{\beta}\,, \qquad (ab)^{\alpha}{}_{\beta} := a^{\alpha}{}_{\gamma}b^{\gamma}{}_{\beta}\,. \tag{5.11}$$

Поскольку элемент (5.10) находится в инфинитезимальной окрестности единицы группы он должен допускать представление (5.1). Это требует

$$[t_i\,,t_j] = f_{ij}^k t_k\,, \tag{5.12}$$

где некоторые численные коэффициенты, называемые *структурными коэффициентами*. Структурные коэффициенты f_{ij}^k во многом определяют структуру группы Ли G.

По своему определению, коммутатор

$$[a\,,b] := a\circ b - b\circ a\,, \tag{5.13}$$

определенный по некоторому ассоциативному произведению $\circ$ (в нашем случае матричному), удовлетворяет важному соотношению, называемому *тождеством Якоби*

$$[a\,,[b\,,c]] + [b\,,[c\,,a]] + [c\,,[a\,,b]] = 0\,. \tag{5.14}$$

Задача 5.3. Проверить.

Теперь мы можем ввести понятие *алгебры Ли*, имеющее фундаментальное значение в математике и физике.

Def: Алгебра l с произведением, обозначаемым $[a\,,b]\quad\forall a,b\in l$, называется алгеброй Ли, если произведение антисимметрично

$$[a\,,b]=-[b\,,a] \tag{5.15}$$

и для любых $a,b,c\in l$ выполняется тождество Якоби (5.14), (которое является тождеством только если $[\,,]$ - коммутатор, построенный по ассоциативному произведению согласно (5.13)).

Пусть t_i - некоторый базис алгебры Ли l. Тогда должны выполняться соотношения (5.12) с некоторыми структурными коэффициентами f_{ij}^k, которые антисимметричны

$$f_{ij}^k=-f_{ji}^k \tag{5.16}$$

и удовлетворяют тождеству Якоби в форме

$$f_{ij}^l f_{lk}^n+f_{jk}^l f_{li}^n+f_{ki}^l f_{lj}^n=0\,. \tag{5.17}$$

Задача 5.4. Проверить.

Представлением алгебры Ли l называется ее реализация матрицами ${t_i}^\alpha{}_\beta$ с с лиевским произведением, реализованным матричным коммутатором.

Модулем алгебры Ли l называется линейное пространство V, в котором элементы l действуют как линейные операторы согласно (5.2).

Важным следствием описанной конструкции является то, что всякая группа Ли G порождает алгебру Ли g, и всякий G-модуль порождает g-модуль. Идея в том, чтобы вместо групп изучать их алгебры Ли, а вместо G-модулей изучать g-модули, так как часто это проще.

Мы применим эту идею к различным симметриям, включающим группу движений $\mathbb{R}^n$ и релятивистским симметриям, что позволит нам вскоре построить спинорное представление этих симметрий.

При этом важно помнить, что, вообще говоря, алгебры Ли характеризуют порождающие их группы Ли не полностью. В частности, могут существовать разные группы Ли, обладающие одной алгеброй Ли.

Задача 5.5. Привести пример.

5.2 Примеры алгебр Ли

5.2.1 gl(n)

Группа $GL(n)$ это группа невырожденных (обратимых) матриц $a^i{}_j,\, i,j=1,\dots n$. Элемент $g\in G$ близкий к единичному имеет вид

$$g^i{}_j=\delta^i_j+\varepsilon t^i{}_j\,, \tag{5.18}$$

где $t^i{}_j$ - любая матрица, а параметр ε бесконечно мал. Поэтому алгебра Ли $gl(n)$ - это алгебра всевозможных матриц $n\times n$ с матричным произведением (5.11) в качестве лиевского произведения.

Задача 5.6. Какова размерность $gl(n)$?

Введем базис в $gl(n)$ следующим образом. $(e^a{}_b)^i{}_j$ - матрица с единственным отличным от нуля элементом, расположенном на пересечении a-й строки и b-ого столбца. Здесь a и b нумеруют разные элементы в пространстве матриц, а i и j нумеруют элементы данной матрицы при фиксированных a и b.

Задача 5.7. Убедиться, что $(e^a{}_b)^i{}_j$ образуют базис в пространстве матриц.

Матрицу $(e^a{}_b)^i{}_j$ удобно представить в виде

$$(e^a{}_b)^i{}_j = \delta^a_j \delta^i_b \tag{5.19}$$

Задача 5.8. Убедиться, что в этом базисе

$$e^a{}_b e^c{}_d = \delta^a_d \, e^c{}_b \tag{5.20}$$

и, следовательно,

$$[e^a{}_b \, , e^c{}_d] = \delta^a_d \, e^c{}_b - \delta^c_b e^a{}_d \, . \tag{5.21}$$

Формула (5.21) задает определяющие соотношения алгебры Ли $gl(n)$. Ее надо помнить как таблицу умножения. Мы вывели эту формулу в тавтологическом (матричном) представлении $gl(n)$. Но у $gl(n)$ есть много других представлений. Во всех этих представлениях существует базис, в котором определяющие соотношения $gl(n)$ имеют вид (5.21).

5.2.2 sl(n)

$SL(n)$ - это группа матриц с единичным детерминантом. Детерминант единичной матрицы равен единице.

Задача 5.9. Доказать, что

$$\det |\delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j| = 1 + \varepsilon t^i{}_i + o(\varepsilon^2) \tag{5.22}$$

Алгебра Ли $sl(n)$ это алгебра коммутаторов матриц с нулевым следом

$$tr(t) := t^i{}_i = 0 \, . \tag{5.23}$$

Задача 5.10. Убедиться, что матрицы с нулевым следом образуют алгебру Ли, с помощью следующей Леммы:

Задача 5.11. Доказать Лемму: коммутатор $[a \, , b]$ имеет нулевой след для любых матриц a и b

$$tr([a \, , b]) = 0 \, . \tag{5.24}$$

С более общей точки зрения соотношение (5.24) служит определением следа для произвольной ассоциативной алгебры: следом $tr(a)$ ассоциативной алгебры A называется любое линейное отображение $A \to \mathbb{K}$ в поле над которым построена A, удовлетворяющее условию

$$tr(a \circ b) = tr(b \circ a) \qquad \forall a, b \in A \, . \tag{5.25}$$

6 Лекция 8.
1 курс, 2 семестр, 04 Апреля 2019

6.1 Алгебры Ли - продолжение

6.1.1 $o(n)$

В определяющих соотношениях ортогональной группы (4.11)

$$A^i{}_k A^j{}_l \delta_{ij} = \delta_{kl} \tag{6.1}$$

положим

$$A^i{}_j = \delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j \,. \tag{6.2}$$

В линейном по ε приближении это дает условия

$$\delta_{ij} t^i{}_k \delta^j_l + \delta_{ij} \delta^i_k t^j{}_l = 0 \,, \tag{6.3}$$

что эквивалентно

$$\delta_{il} t^i{}_k + \delta_{jk} t^j{}_l = 0 \,. \tag{6.4}$$

Вводя обозначение

$$t_{lk} := \delta_{il} t^i{}_k \tag{6.5}$$

получаем условие

$$t_{lk} + t_{kl} = 0 \,. \tag{6.6}$$

Это означает, что алгебра Ли $o(n)$ описывается антисимметричными матрицами

$$t_{ij} = -t_{ji} \,. \tag{6.7}$$

Задача 6.1. Убедиться, что коммутатор антисимметричных матриц дает антисимметричную матрицу, т.е. $o(n)$ действительно алгебра Ли.

В качестве базиса $o(n)$ можно выбрать антисимметричные матрицы

$$t_{ab} := \delta_{ac} e^c{}_b - \delta_{bc} e^c{}_a \tag{6.8}$$

Задача 6.2. Найти определяющие соотношения алгебры Ли $o(n)$

С помощью (5.21) легко убедиться, что

$$[t_{ab}\,, t_{cd}] = -\delta_{bc} t_{ad} + \delta_{ac} t_{bd} + \delta_{bd} t_{ac} - \delta_{ad} t_{bc} \,. \tag{6.9}$$

6.1.2 sp(2n)

Симплектическая группа $SP(2n)$ определяется соотношениями похожими на (4.11) с заменой симметричной метрики δ_{ij} на антисимметричную невырожденную форму $C_{ij} = -C_{ji}$

$$A^i{}_k A^j{}_l C_{ij} = C_{kl} \tag{6.10}$$

Задача 6.3. Вычислить размерность $SP(2n)$

Задача 6.4. Найти матричную реализацию алгебры Ли $sp(2n)$

Алгебры $sl(n)$, $o(n)$, $sp(2n)$ исчерпывают четыре бесконечные серии классических простых алгебр по классификации Картана (над комплексным полем). При этом алгебры $o(n)$ при четных и нечетных n различаются. Кроме этих алгебр есть еще пять исключительных алгебр Ли g_2, f_4, e_6, e_7, e_8.

Задача 6.5. Убедиться, что алгебра $gl(n)$ не простая.

6.1.3 Вещественные алгебры

Классификация алгебр Ли над вещественным полем более сложна. Так вместо (6.10) можно написать

$$A^i{}_k A^j{}_l \eta_{ij} = \eta_{kl}\,, \tag{6.11}$$

где η_{ij} произвольная невырожденная симметричная матрица (форма). Переходя от η_{kl} к

$$\eta'_{ij} = U_i{}^k U_j^l \eta_{kl}\,, \tag{6.12}$$

мы лишь меняем базис в пространстве, где действуют повороты. Это значит, что уравнения (6.11) с η_{kl} и η'_{kl}, связанными (6.12), описывают одну и ту же алгебру Ли. Из курса линейной алгебры известно, что классы эквивалентности по отношению к преобразованию (6.12) определяются индексом инерции равным разности числа положительных и отрицательных собственных значений. Иными словами, в качестве представителей разных классов эквивалентности можно взять

$$\eta_{ij} = \delta_{ij} \quad i,j = 1,\dots p \tag{6.13}$$

$$\eta_{ij} = -\delta_{ij} \quad i,j = p+1,\dots p+q\,, \tag{6.14}$$

и $\eta_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Матрицы $A^i{}_j$, удовлетворяющие (6.11), образуют *псевдоортогональную* группу $O(p,q)$. Соответствующая алгебра Ли обозначается $so(p,q)$.

Задача 6.6. Доказать, что $so(p,q) = so(q,p)$

Задача 6.7. Найти структурные соотношения $so(p,q)$

Определение: Алгебра l_r называется вещественной формой комплексной алгебры l_c, если последняя получается из l_r в результате замены поля вещественных чисел на поле комплексных чисел.

Алгебры $so(p,q)$ (с $q > p$) задают различные вещественные формы комплексной алгебры $o(p+q|\mathbb{C})$.

Задача 6.8. Доказать

Аналогично, различные вещественные формы $sl(n|\mathbb{C})$ обозначаются $sl(n|\mathbb{R})$ и $su(p,q)$ ($p{+}q = n$). $sp(2n|\mathbb{C})$ также допускает различные вещественные формы.

6.2 Симметрии специальной теории относительности

Специальная теория относительности была построена в 1905 году как результат разрешения парадокса теории электромагнетизма Максвелла, построенной в середине 19 века и предсказывавшей, что скорость распространения света не зависит от системы отсчета. На это ушло много усилий лучших умов своего времени таких как Эйнштейн, Лоренца, Пуанкаре и других. С современной точки зрения кажется удивительным, что это заняло так много времени. Во многом причина в том, что не был развит необходимый математический аппарат, связанный в первую очередь с теорией групп. Сейчас мы попробуем в этом убедиться.

Итак, световой сигнал распространяется по закону

$$x^i = x_0^i + tv^i \,, \qquad v^i v^j \delta_{ij} = c^2 \,, \tag{6.15}$$

где c скорость света, которая является мировой константой. Размерность c есть cm/sec. Бывает удобно выбрать систему единиц, в которой $c = 1$, что означает, что и расстояние и время измеряется одними единицами.

Задача 6.9. Чему равна единица времени $1cm$?

После этого время и пространственные координаты становятся настолько похожими, что их удобно рассматривать как единый 4-вектор

$$x^a := (x^0, x^i) \,, \qquad x^0 := t \,, \qquad a = 0,1,2,3 \,, \qquad i = 1,2,3. \tag{6.16}$$

x^a удобно понимать как координаты единого пространства-времени, называемого *пространством Минковского.*

Из формулы (6.15) следует, что *интервал* между точками x^a и x_0^a

$$s^2 := (x^0 - x_0^0)^2 - (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)\delta_{ij} \tag{6.17}$$

не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой. Строго говоря, это не совсем так, поскольку анализ распространения света говорит лишь, что если интервал равнялся нулю в одной системе отсчета - он будет равняться нулю и в любой другой. Например, интервал мог бы умножаться на число при переходе от одной системе к другой, т.е. отличаться на конформное преобразование. Но минимальная симметрия, совместимая с независимостью закона распространения света от системы отсчета, требует инвариантности интервала.

Групповой смысл специальной теории относительности сильно упрощается, если ввести *метрику Минковского* η_{ab} с ненулевыми компонентами

$$\eta_{00} = 1 \,, \qquad \eta_{ij} = -\delta_{ij} \,. \tag{6.18}$$

Теперь интервал между точками пространства Минковского с координатами y^a и x^a приобретает простой вид

$$s^2 = \eta_{ab}(x^a - y^a)(x^b - y^b) \tag{6.19}$$

Преобразования СТО есть ни что иное как движения пространства-времени Минковского. Группа движений пространства Минковского называется группой Пуанкаре и обозначается $ISO(1,3)$. Она включает группу Лоренца псевдоортогональных преобразований $O(1,3)$ координат x^a и группу пространственно-временных трансляций

$$x'^a = A^a{}_b x^b + a^a \,, \qquad \eta_{ac} A^a{}_b A^c{}_d = \eta_{bd} \,. \tag{6.20}$$

Здесь $A^a{}_b$ описывает преобразования Лоренца, а a^a пространственно-временные трансляции.

Задача 6.10. Каковы размерности группы Лоренца и группы Пуанкаре?

Задача 6.11. Найти нормальный делитель группы Пуанкаре

Группа Лоренца содержит обычные пространственные вращения и отражения, а также бусты - преобразования перехода от одной системы отсчета к другой. Явный вид бустов найти не сложнее, чем на лекции 4 мы вывели формулы преобразований при поворотах.

Рассмотрим случай, когда одна система движется относительно другой вдоль оси x^1. В этом случае матрица отличается от единичной только в компонентах $A^a{}_b$ с $a, b = 0, 1$. Условие (6.20) дает три условия

$$(A^0{}_0)^2 - (A^1{}_0)^2 = 1 \,, \tag{6.21}$$

$$(A^1{}_1)^2 - (A^0{}_1)^2 = 1 \,, \tag{6.22}$$

$$A^0{}_0 A^0{}_1 - A^1{}_0 A^1{}_1 = 0 \,. \tag{6.23}$$

Первые два соотношения решаются аналогично случаю группы вращений, разобранному в Лекции 4,

$$A^0{}_0 = a \cosh(\phi_1) \,, \qquad A^1{}_0 = \operatorname{sh}(\phi_1) \,, \qquad a^2 = 1 \,, \tag{6.24}$$

$$A^1{}_1 = b \cosh(\phi_2) \,, \qquad A^0{}_1 = \operatorname{sh}(\phi_2) \,, \qquad b^2 = 1 \,. \tag{6.25}$$

Здесь знаки $a = -1$ и $b = -1$ в первом и втором соотношениях отвечают отражениям времени и пространства, соответственно. Рассмотрим случай $a = b = 1$. Тогда третье соотношение дает

$$\cosh(\phi_1) \operatorname{sh}(\phi_2) - \cosh(\phi_2) \operatorname{sh}(\phi_1) = 2 \operatorname{sh}(\phi_2 - \phi_1) = 0 \tag{6.26}$$

откуда следует $\phi_1 = \phi_2 = \phi$.

Это дает

$$x'^0 = \cosh(\phi) x^0 + \operatorname{sh}(\phi) x^1 \,, \tag{6.27}$$

$$x'^1 = \cosh(\phi) x^1 + \operatorname{sh}(\phi) x^0 \,, \tag{6.28}$$

Из второго соотношения следует, что скорость движения начала координат штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной

$$v = \frac{\operatorname{sh}(\phi)}{\cosh(\phi)} \,. \tag{6.29}$$

Заметим, что $|v|$ всегда меньше единицы, т.е. скорость движения одной системы относительно другой не может превышать скорость света.

Задача 6.12. Показать, что

$$\cosh(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad \mathrm{sh}(\phi) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6.30}$$

Подстановка этих выражений в (6.27) и (6.28) дает обычные преобразования Лоренца при переходе от одной системы отсчета к другой.

В нерелятивистской механике динамика материальной точки характеризуется энергией и импульсом. Релятивистское обобщение дается четыре вектором импульса P^a, который определяется следующим образом:

$$P^a := m\frac{dx^a}{ds}\,, \qquad ds := \sqrt{dx^a dx^b \eta_{ab}} = dt\sqrt{1-v^2}\,. \tag{6.31}$$

В результате,

$$P^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad P^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6.32}$$

Поскольку P^a преобразуется как вектор $P^a P^b \eta_{ab}$ является инвариантом группы Лоренца, т.е. не зависит от выбора системы отсчета. Значит

$$P^a P^b \eta_{ab} = m^2 \tag{6.33}$$

Задача 6.13. Доказать
Разлагая P^0, отождествляемое с энергией, с точностью до второго порядка получаем

$$P^0 = m + \frac{mv^2}{2} + o(v^3) \tag{6.34}$$

Учитывая, что $c = 1$ эта формула и означает, что $E = mc^2$ в системе покоя. Замечу, что первая поправка в точности совпадает с нерелятивистской кинетической энергией.

В нерелятивизме энергия не смешивается с импульсом и поэтому определена с точностью до константы. В СТО это уже не так, так как энергия является компонентой 4-вектора.

7 Лекция 9.
1 курс, 2 семестр, 11 Апреля 2019

7.1 Релятивистские симметрии - продолжение

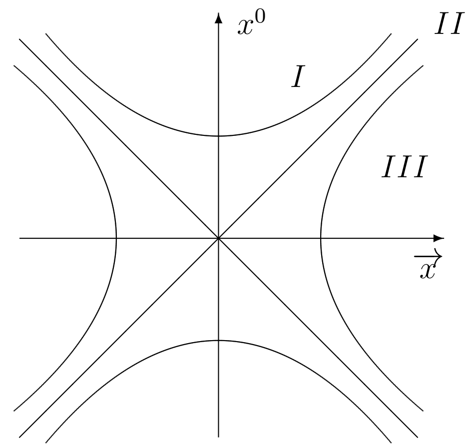
Группа Пуанкаре содержит столько же независимых параметров, сколько и группа Галилея: 3 вращения, 3 буста, 3 пространственных сдвига и один временной. Но действие группы Пуанкаре отличается от действия группы Галилея. Математически, Группа Пуанкаре является *деформацией* группы Галилея. Наоборот, группа Галилея является *сжатием* группы Пуанкаре. Параметром деформации является обратная скорость света c^{-1}.

Инвариантом преобразований из группы Пуанкаре является интервал

$$s^2 = \eta_{ab}(x^a - y^a)(x^b - y^b)\,. \tag{7.1}$$

Аналогично тому, как в случае эвклидового пространства орбитами группы вращений являются сферы, в СТО орбитами группы Лоренца являются поверхности постоянного s^2. Однако, в отличие от эвклидового случая, в СТО существует три типа орбит:
$s^2 > 0$: времени-подобный интервал
$s^2 = 0$: свето-подобный интервал
$s^2 < 0$: пространственно-подобный интервал
Названия связаны с тем, что $s^2 > 0$ для событий, происшедших в разные моменты времени в одной точке пространства и $s^2 < 0$ для событий, происшедших в один момент времени в разных точках пространства.

Разные орбиты группы Лоренца имеют вид



(7.2)

При размерности пространства-времени $d > 2$ все орбиты являются поверхностями вращения. Строго говоря, имеется еще одна вырожденная орбита группы Лоренца, состоящая из одной точки - начала координат.

Группа Лоренца $O(3,1)$ содержит в качестве подгруппы $SO(3,1)$ и ортохронную группу Лоренца $SO_{\uparrow}(3,1)$

$$SO_{\uparrow}(3,1) \subset SO(3,1) \subset O(3,1)\,. \tag{7.3}$$

Ортохронная группа Лоренца $SO_{\uparrow}(3,1)$ не меняет направление времени, что выражается условием

$$A^0{}_0 \geq 1\,. \tag{7.4}$$

Задача 7.1. Доказать, что это условие сохраняется при групповом умножении. Убедиться, что выбор коэффициентов $a = b = 1$ в (6.24) означал, что рассматривался элемент $SO_{\uparrow}(3,1)$.

Важнейшее отличие специальной теории относительности от нерелятивистской состоит в том, что скорость света является максимальной скоростью передачи сигналов. Причинно связанные области по отношению к началу координат находятся внутри конуса, состоящего из конуса будущего и конуса прошлого (включая границу). Область вне конуса причинно несвязана с началом координат, т.е. передать сигнал в эту область из начала координат невозможно.

Отсюда вытекает важное следствие: сигналы могут передаваться только полями, распространяющимися не быстрее скорости света. Абсолютно жестких тел (палок) в СТО существовать не может. Механизм взаимодействия состоит в том, что некоторый объект A излучает поле, это поле распространяется, доходит до другого объекта B и влияет на него. Последовательное развитие этой идеи приводит к тому, что все объекты это поля.

7.2 Скалярное поле и уравнение Клейна-Гордона-Фока

Поле - это функция от точек (координат) пространства-времени x^a. Простейшим и одновременно важным примером поля является *скалярное поле* $\phi(x)$. В частности, скалярным полем является поле Хиггса. Смысл термина скалярное поле не столько в том, что поле $\phi(x)$ имеет одну компоненту, сколько в задании определенного закона его преобразований при действии группы Пуанкаре. Пусть $g \in ISO(3,1)$ и

$$x'^a := g(x)^a\,, \qquad x'^a = A^a{}_b x^b + a^a\,. \tag{7.5}$$

Пусть $\phi'(x)$ результат действия g на $\phi(x)$. Закон преобразования скалярного поля задается условием, что преобразованное поле в преобразованной точке равно исходному полю в исходной точке, т.е.

$$\phi'(x') = \phi(x)\,. \tag{7.6}$$

Это эквивалентно закону преобразования

$$\phi'(x) = \phi(g^{-1}(x))\,. \tag{7.7}$$

Функции $\phi(x)$ образуют линейное пространство Φ, так как их можно складывать и умножать на числа. Пространство Φ бесконечномерно. Очевидно, преобразование (7.7) является линейным.

Задача 7.2. Проверить

В результате, преобразование (7.7) задает представление группы Пуанкаре.

Задача 7.3. Доказать.
Это представление бесконечномерно. Можно сказать, что Φ образует Пуанкаре-модуль.

Приводим ли этот модуль? Сейчас мы убедимся, что да, поскольку на ϕ оказывается возможным наложить релятивистски инвариантные условия (уравнения). Чтобы это сделать введем 4-вектор производной

$$\frac{\partial}{\partial x^a} := \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right), \qquad a = 0, 1, \ldots d-1\,. \tag{7.8}$$

В нашем пространстве-времени $d = 4$.

Частная производная $\frac{\partial}{\partial x^a}$ понимается как обычная производная по координате x^a с фиксированным номером a и неизменными остальными координатами x^b с $b \neq a$. Для упрощения записи мы будем использовать обозначение

$$\partial_a := \frac{\partial}{\partial x^a}\,. \tag{7.9}$$

В этих терминах правила дифференцирования определяются соотношением

$$\partial_b(x^a) = \delta^a_b\,. \tag{7.10}$$

Фундаментальное уравнение Клейна-Гордона-Фока имеет вид

$$\Box\phi(x) + m^2\phi(x) = 0\,, \tag{7.11}$$

где *оператор Д'Аламбера* определяется следующим образом

$$\Box := \eta^{ab}\partial_a\partial_b\,. \tag{7.12}$$

По отношению к лоренцевым поворотам оператор Д'Аламбера также инвариантен

$$\eta^{ab}\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b} = \eta^{ab}\frac{\partial}{\partial x'^a}\frac{\partial}{\partial x'^b}\,. \tag{7.13}$$

Действительно, из соотношения (7.10) следует, что если $x'^a = A^a{}_b x^b$, то ∂^a преобразуется с помощью обратной матрицы

$$\partial'_a = A^{-1b}{}_a\partial_b\,. \tag{7.14}$$

Задача 7.4. Убедится
Но поскольку матрица обратная к (псевдо)ортогональной также (псевдо)ортогональна, она оставляет инвариантной метрику Минковского η^{ab}, что влечет за собой (7.13).

Замечу, что, как вам будет показано в курсе анализа, при общем переходе от одних координат к другим

$$x'^a = x'^a(x) \tag{7.15}$$

производные преобразуются следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial x'^b(x)}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x'^b}\,. \tag{7.16}$$

Задача 7.5. Убедиться, используя определение производных через предел малых приращений

Инвариантность уравнения КГФ означает, что преобразования из группы Пуанкаре переводят любое его решение в некоторое другое решение. Здесь используется то, что пространство решений линейных уравнений образует линейное пространство, т.е. линейная комбинация любых двух решений также является решением. Это означает, что пространство решений уравнения КГФ образует инвариантное подпространство пространства $\Phi_m \subset \Phi$, т.е. Пуанкаре-модуль Φ приводим. Более того, он бесконечно приводим, так как инвариантное подпространство Φ_m отвечает любому выбору параметра m^2 и подпространства Φ_m с разными m^2 не пересекаются.

Задача 7.6. Доказать

8 Лекция 10.
1 курс, 2 семестр, 25 Апреля 2019

8.1 Волновая интерпретация

Рассмотрим решения уравнения КГФ, начав с безмассового случая $m^2 = 0$. Рассмотрим плоское решение $\phi(x^0, x^1)$, не зависящее от координат x^2 и x^3. Это означает, что в каждый момент времени x^0 и при каждом x^1, решение является константой в ортогональной плоскости (x^2, x^3). Для таких решений уравнение (7.11) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}\right)\phi(x^0, x^1) = 0\,. \tag{8.1}$$

Как решать такое уравнение? Полезно использовать формулу Эйлера

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\,, \tag{8.2}$$

переписав уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^1}\right)\phi(x^0, x^1) = 0\,. \tag{8.3}$$

Здесь используется фундаментальное свойство коммутативности производных

$$\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a\,. \tag{8.4}$$

Задача 8.1. Убедиться на полиномах.

Очевидно, в такой форме уравнение КГФ допускает решение вида

$$\phi(x^0, x^1) = \phi^L(x^0 + x^1) + \phi^R(x^0 - x^1)\,, \tag{8.5}$$

где $\phi^L(x)$ и $\phi^R(x)$ - произвольные функции одной переменной.

Задача 8.2. Убедиться.

Оказывается, что эта формула задает общее решение уравнения (8.1), т.е. любое его решение может быть представлено в таком виде.

Рассмотрим решение $\phi^R(x^0 - x^1)$ с некоторым профилем $\phi^R(x)$. Так как при $x^0 \to x^0 + \Delta$ и $x^1 \to x^1 + \Delta$, $\phi^R(x^0 - x^1)$ не меняется, оно описывает движение этого профиля направо.

Какова скорость этого движения? Очевидно $v = c = 1$, т.е. движение происходит со скоростью света. Забегая вперед, замечу, что это не случайно, так как электромагнитное поле, т.е. свет, также удовлетворяет уравнению КГФ.

Аналогично, $\phi^L(x^0+x^1)$ описывает движение налево. В 1+1 мерном пространстве-времени есть только две возможности: движение налево и направо. При $d > 2$ плоские волны могут двигаться в любую сторону. И хотя не все решения являются плоскими волнами, все они могут быть представлены как комбинации плоских волн.

Рассмотрим решение вида

$$\phi(x) = \exp i p_a x^a = \exp i(p_0 x^0 + p_1 x^1 + \ldots)\,, \tag{8.6}$$

где p_a - числа. Напомню, что

$$\exp i\varphi = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\,. \tag{8.7}$$

Поскольку

$$\partial_a \exp i p_a x^a = i p_a \exp i p_a x^a \tag{8.8}$$

получаем

$$\Box \exp i p_a x^a = -p_c p_b \eta^{cb} \exp i p_a x^a\,. \tag{8.9}$$

Таким образом, уравнение КГФ с массой m решается, если

$$p_a p_b = m^2 \tag{8.10}$$

или, эквивалентно,

$$p_0^2 = m^2 + \sum_n \vec{p}_n^2\,, \qquad n = 1, 2, 3\,. \tag{8.11}$$

Как станет ясно позднее, эта формула снова выражает формулу Эйнштейна $E = mc^2$.

Очевидно, $\nu = \frac{p_0}{2\pi}$ - частота колебаний в (любой) точке x. Чем больше P_0 - тем выше частота колебаний.

$\vec{p}_n$ - волновой вектор - вектор в пространстве. У $\vec{p}_n$ есть направление и длина. Пусть $\vec{p}_n$ смотрит в направлении 1, т.е.

$$p_1 = p\,, \qquad p_2 = p_3 = 0\,. \tag{8.12}$$

Тогда решение имеет вид

$$\exp i(p_0 x^0 + p x^1) \tag{8.13}$$

и имеет период $\frac{2\pi}{p}$ по направлению x^1. Таким образом, это решение описывает волну, бегущую налево по направлению x^1. Поэтому уравнение КГФ часто называется *волновым*.

Уравнение (8.11) имеет два решения

$$p_0 = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}\,. \tag{8.14}$$

При $m = 0$, $p_0 = \pm|\vec{p}|$ в соответствии с нашим анализом безмассового случая. При $m \neq 0$, p_0 и p не пропорциональны.

Важно, что у уравнения КГФ имеется две ветви решений с $p_0 > 0$ и $p_0 < 0$, называющиеся, соответственно *положительно- частотным* и *отрицательно-частотным*. Эти решения комплексно сопряжены. Если поле $\phi(x)$ вещественно, то они оба обязаны присутствовать

$$\phi(x) = f_+(\vec{p}) + f_-(\vec{p}) \tag{8.15}$$

В квантовой теории поля $f_\pm(\vec{p})$ становятся операторами: f_+ - оператор рождения частиц, а f_- - оператор уничтожения частиц. Процедура квантования различает положительно- и отрицательно-частотные решения. Это разделение является общим и служит одним из основных постулатов квантования релятивистских полей. В классической теории обе ветви равноправны.

p_a оказывается 4-импульсом. $p_0 = h\nu = \hbar\omega$ - энергия. $\vec{p} = h/\lambda$ - импульс. h - постоянная Планка

$$h = 2\pi\hbar\,, \qquad \hbar = 1.054\ldots 10^{-27} \tag{8.16}$$

Уравнение КГФ описывает свободные частицы на подлете к зоне взаимодействия. Взаимодействия описываются нелинейными поправками к уравнениям. Например, для скалярного поля такие поправки могут иметь вид

$$\Box\phi + m^2\phi + \lambda\phi^3 = 0\,. \tag{8.17}$$

Поэтому задача теории поля и квантовой теории поля состоит из двух:

Описание возможных типов частиц.

Описание их возможных взаимодействий.

Эта последняя задача оказывается в высшей степени нетривиальной и интересной.

Начнем с более простой первой задачи, которая решается с помощью группового анализа релятивистских симметрий.

8.2 Групповая интерпретация

Мы убедились, что уравнение КГФ релятивистски инвариантно. Это значит, что преобразования из группы Пуанкаре (7.5), действующие по формуле (7.7), переводят решения в решения. Иными словами, решения уравнения КГФ образуют $ISO(3,1)$-модуль. Если ограничиться ортохронной подгруппой $ISO_\uparrow(3,1) \subset ISO(3,1)$, не изменяющей направление стрелы времени, положительно- и отрицательно-частотные решения образуют ее подмодули $V^\pm_m$.

Задача 8.3. Убедиться

Эти модули неприводимы. Фактически, это следует из того фундаментального факта, являющегося следствием теории Фурье, что любое (хорошее) решение уравнения КГФ может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн

$$\phi(x) = \int d^3\vec{p}\,(\phi_+(\vec{p})\exp ip_a x^a + \phi_-(\vec{p})\exp -ip_a x^a)\,, \qquad p_0 = \sqrt{m^2+\vec{p}^2}\,. \tag{8.18}$$

Задача 8.4. Доказать неприводимость соответствующих Пуанкаре-модулей

В разложении Фурье, элементарные проские волны образуют нечто вроде базиса бесконечномерных пространств $V^\pm_m$.

Зная как действуют на скалярное поле преобразования из группы Пуанкаре нетрудно получить закон действия алгебры Ли группы Пуанкаре. Для этого в формулы (7.5) и (7.7) подставим преобразования группы Пуанкаре с бесконечно малыми параметрами

$$x'^a = x^a + \omega^a{}_b x^b - \epsilon^a\,, \qquad \omega_{ab} = -\omega_{ba}\,. \tag{8.19}$$

Здесь ω_{ab} задает бесконечно малый лоренцев поворот, а ϵ^a - бесконечно малый сдвиг (знаки выбраны для будущего удобства). Соответствующее инфинитезимальное преобразование скалярного поля дает

$$\phi'(x) = \phi(x^a - \omega^a{}_b x^b + \epsilon^a) = \phi(x^a) + \epsilon^a \partial_a \phi(x^a) - \omega^a{}_b x^b \partial_a \phi(x^a) + \dots\,, \tag{8.20}$$

где многоточие обозначает несущественные для дальнейшего члены более высоких степеней по ω^{ab} и ϵ^a. Вспоминая определение генераторов алгебры Ли как коэффициентов при соответствующих инфинитезимальных параметрах

$$g = I + \epsilon^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} L_{ab}\,, \tag{8.21}$$

получаем генераторы трансляций P_a и лоренцевых преобразований L_{ab} в виде

$$P_a = \partial_a\,, \qquad L_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a\,. \tag{8.22}$$

Задача 8.5. Убедиться, что алгебра Ли группы Пуанкаре имеет вид

$$[P_a\,, P_b] = 0\,, \tag{8.23}$$

$$[L_{ab}\,, P_c] = \eta_{bc} P_a - \eta_{ac} P_b\,, \tag{8.24}$$

$$[L_{ab}\,, L_{cd}] = \eta_{bc} L_{ad} - \eta_{ac} L_{bd} - \eta_{bd} L_{ac} + \eta_{ad} L_{bc}\,. \tag{8.25}$$

Задача 8.6. Убедиться, что трансляции образуют идеал алгебры Ли группы Пуанкаре.

Эти фундаментальные соотношения определяют бóльшую часть физического содержания СТО. Важно, что хотя мы их вывели в определенном представлении, определяющие соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре не зависят от представления. Поэтому задача о классификации различных релятивистских систем фактически сводится к задаче классификации Пуанкаре-модулей. Начнем постепенно двигаться в эту сторону.

Прежде всего заметим, что гармонические плоские волны характерны тем, что они образуют собственные вектора оператора импульса

$$P_a \phi_p(x) = i p_a \phi_p(x)\,, \qquad \phi_p(x) := \exp i p_a x^a \tag{8.26}$$

Замечу, что в квантовой механике обычно используют другую нормировку оператора импульса $P_a \to i P_a$ чтобы его собственные значения были вещественными. Я не буду этого делать, чтобы не вводить мнимую единицу в определяющие соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре.

Задача 8.7. Почему операторы импульса можно диагонализовать одновременно?

Чтобы продвинуться дальше, нам понадобится важное понятие *универсальной обертывающей алгебры Ли.*

8.3 Универсальная обертывающая алгебра и операторы Казимира

Пусть l - алгебра Ли с определяющими соотношениями

$$[t_i\,, t_j] = f_{ij}^k t_k\,. \tag{8.27}$$

Универсальная обертывающая алгебра $U(l)$ определяется как фактор ассоциативной алгебры, свободно порожденной образующими t_i, отфакторизованной по отношению эквивалентности (8.27), где $[\,,]$ теперь понимается как коммутатор в $U(l)$.

Простыми словами, $U(l)$ это ассоциативная алгебра всевозможных произведений

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{i_1,i_2,\dots i_n} t_{i_1} \circ t_{i_2} \circ \dots \circ t_{i_n} \tag{8.28}$$

по модулю соотношений

$$t_i \circ t_j - t_j \circ t_i = f_{ij}^k t_k\,. \tag{8.29}$$

Задача 8.8. Убедиться, что соотношения (8.29) позволяют выбрать базис в $U(l)$ с полностью симметричными коэффициентами $A^{i_1,i_2,\dots i_n}$

Определение: *Центром алгебры* $C \in A$ называется такая совокупность элементов $c_\alpha \in A$, что

$$c_\alpha \circ a = a \circ c_\alpha \qquad \forall a \in A \tag{8.30}$$

Элементы центра $U(l)$ называются *операторами Казимира* алгебры Ли l.

Универсальная обертывающая алгебры Ли группы Пуанкаре это ассоциативная алгебра функций от P_a и L_{ab}.

Задача 8.9. Убедиться, что оператор

$$c_2 := P_a P_b \eta^{ab} \tag{8.31}$$

является оператором Казимира в алгебре Ли группы Пуанкаре.

Поскольку он квадратичен по элементам $iso(3,1)$, c_2 называется квадратичным оператором Казимира.

На этом языке уравнение КГФ приобретает вид

$$c_2\phi + m^2\phi = 0\,. \tag{8.32}$$

Чтобы оценить важность этой интерпретации нужно применить лемму Шура, которая гласит, что в (унитарном) неприводимом представлении алгебры Ли l все ее операторы Казимира кратны единичному. Отсюда следует, в частности, что уравнение КГФ с той или иной массой должно выполняться не только для скалярного поля, с которого мы начали, но и для любых других полей, описывающих элементарные (неразложимые) частицы. В частности, оно выполняется для электромагнитного поля с массой $m = 0$.

9 Лекция 11.
1 курс, 2 семестр, 2 мая 2019

9.1 Алгебра Вейля и дифференцирования

Начнем с повторения того, что такое *алгебра Вейля.* По определению, алгебра Вейля A_n это ассоциативная алгебра с образующими $\partial_a\,, x^a$, подчиненными соотношениям

$$[\partial_a\,, x^b] = \delta_a^b I\,, \qquad [x^a\,, x^b] = 0\,, \qquad [\partial_a\,, \partial_b] = 0\,, \tag{9.1}$$

$[\,,]$ - коммутатор по отношению к закону композиции в A_n. Термин *образующие* означает, что A_n - это алгебра всевозможных полиномов от ∂_a и x^a, подчиненных соотношениям (9.1). Иными словами, A_n это обертывающая алгебра соотношений (9.1).

Убедимся, что A_n это алгебра дифференциальных операторов. Для этого построим A_n-модуль F, который называется *модулем Фока.* По определению F содержит элемент $|0\rangle$, который удовлетворяет условию

$$\partial_a|0\rangle = 0\,. \tag{9.2}$$

Такой элемент называется *вакуумным вектором* или *фоковским вакуумом.* Модуль F строится путем действия элементами x^a на $|0\rangle$. Иными словами, любой элемент $f \in F$ имеет вид

$$|f\rangle := f(x)|0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} f_{a_1\dots a_k} x^{a_1}\dots x^{a_k}|0\rangle\,. \tag{9.3}$$

Задача 9.1. Убедиться, что F образует A_n-модуль. Объяснить, почему F строится только с помощью образующих x^a.

Таким образом, фоковский модуль алгебры Вейля совпадает с пространством функций (например, полиномов) $f(x)$.

Задача 9.2. Чему отвечает вакуум $|0\rangle$?

Чтобы убедиться, что алгебра Вейля есть ни что иное, как алгебра дифференциальных операторов надо использовать тот факт, что коммутатор $[\,,]$ в произвольной ассоциативной алгебре задает ее дифференцирование, удовлетворяющее формуле Лейбница

$$[a\,, bc] = [a\,, b]c + a[b\,, c]\,. \tag{9.4}$$

Задача 9.3. Доказать

В случае произвольной алгебры A, любая операция $D(a) \in A\ \forall a \in A$ называется ее *дифференцированием*, если

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) \qquad \forall a, b \in A\,. \tag{9.5}$$

Дифференцирования ассоциативных алгебр и алгебр Ли, порождаемые операцией $D_a(b) = [a\,, b]$, называются *внутренними.*

Задача 9.4. Доказать, что так определенное D_a задает дифференцирование алгебры Ли

В интересующем нас случае отсюда вытекает обычное тождество Лейбница

$$\partial_a(f_1(x)f_2(x))|0\rangle = (\partial_a(f_1(x))f_2(x) + f_1(x)\partial_a(f_2(x)))|0\rangle\,, \tag{9.6}$$

которое с учетом (9.1) и означает, что ∂_a есть ни что иное как производная.

Задача 9.5. Доказать, что

$$\partial_a(f_1(x)f_2(x))|0\rangle = \partial_a f_1(x)f_2(x)|0\rangle \tag{9.7}$$

В общем случае можно доказать, что все дифференцирования той или иной алгебры Ли l или ассоциативной алгебры A сами образуют алгебру Ли $D(l)$ и $D(A)$ с лиевской операцией

$$[D_1\,, D_2](a) := D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))\,. \tag{9.8}$$

Задача 9.6. Доказать, что коммутатор двух дифференцирований тоже задает дифференцирование.

Задача 9.7. Доказать, что внутренние дифференцирования образуют идеал алгебры всех дифференцирований.

9.2 Операторы Казимира и лемма Шура

Как обсуждалось на предыдущей лекции, операторами Казимира называются такие элементы $c \in U(l)$, которые коммутируют со всеми элементами l.

Задача 9.8. Доказать, что любой такой c коммутирует с $U(l)$, т.е. принадлежит ее центру.

Вернемся теперь к квадратичному Казимиру алгебры Ли группы Пуанкаре

$$c_2 := P_a P_b \eta^{ab}\,. \tag{9.9}$$

c_2 очевидно коммутирует с P_c. Вычислим коммутатор с Лоренцевыми поворотами, используя, что коммутатор задает дифференцирование.

$$[L_{ab}\,, c_2] = ([L_{ab}\,, P_c]P_d + P_c[L_{ab}\,, P_d])\eta^{cd} = (\eta_{bc}P_aP_d + P_cP_a\eta_{bd})\eta^{cd} - a \leftrightarrow b = P_aP_b - P_bP_a = 0\,. \tag{9.10}$$

Фактически, это упражнение показывает, что при лоренцевых преобразованиях P_a преобразуется как вектор и поэтому его квадрат не меняется.

Докажем теперь важный факт, который называется
Лемма Шура: Пусть l - алгебра Ли, c - некоторый ее оператор Казимира и V - неприводимый l-модуль. Тогда действие c на V кратно единичному оператору

$$cv = \lambda v \quad \forall v \in V\,, \quad \lambda \in \mathbb{K} \tag{9.11}$$

для алгебраически замкнутого поля (с одним и тем же λ для всех $v \in V$).

Доказательство строится, например, так. Так как $c - \lambda I$ коммутирует с действием алгебры l и l-модуль V неприводим, отображение

$$(c - \lambda I)V \to V \tag{9.12}$$

является либо изоморфизмом либо нулевым. В этом легко убедиться, заметив, что ядро и образ эндоморфизма $V \to V$ являются подмодулями V.

Задача 9.9. Доказать

В случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ у любого оператора c найдется хотя бы один собственный вектор v_λ с некоторым собственным значением λ. Это значит, что ядро $c - \lambda I$ не пусто, так как содержит v. Но тогда $c - \lambda I$ должно действовать нулем на неприводимом l-модуле V. $\Box$

Строго говоря, это доказательство справедливо для конечномерных l-модулей. Тем не менее, Лемма Шура применима и в бесконечномерном случае, если, например, ограничиться унитарными модулями, которые и ассоциируются с элементарными частицами.

Простой, но важный факт: на эквивалентных неприводимых модулях операторы Казимира совпадают

Задача 9.10. Доказать

Важное следствие: если значения операторов Казимира на двух неприводимых модулях не совпадают, то модули неэквивалентны.

9.3 Символ Леви-Чивита и детерминант

В дальнейшим нам понадобится важный объект, который называется *совершенно антисимметричным (псевдо)тензором* или *символом Леви-Чивита* и обозначается $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$, где n совпадает с размерностью пространства-времени. Например, в четырехмерном случае символ Леви-Чивита ϵ^{abcd} несет четыре индекса.

По определению, ϵ^{abcd} антисимметричен относительно перестановки любой пары индексов

$$\epsilon^{\dots a \dots b \dots} = -\epsilon^{\dots b \dots a \dots} . \tag{9.13}$$

Это означает, в частности, что он равен нулю, если хотя бы одна пара индексов совпадает. Значит, $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ может быть отличен от нуля только если все индексы попарно различны. Полагая

$$\epsilon^{0,1,2,\dots n-1} = 1 \tag{9.14}$$

получаем, что для других расстановок индексов $\epsilon^{a_1 \dots a_n} = 1$ для четных подстановок индексов и $\epsilon^{a_1 \dots a_n} = -1$ - для нечетных. Таким образом, $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ реализует представления группы S_n, в котором ее четные элементы реализованы тривиально, а нечетные - умножением -1. Замечу, что выбор знака $\epsilon^{0,1,2,\dots n-1}$ является вопросом удобства.

Символ Леви-Чивита является очень важным инструментом. Например, с его помощью легко определить детерминант и доказать, что он обладает мультипликативным свойством. Пусть дана матрица A_a^b. Рассмотрим выражение

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{a_n} \tag{9.15}$$

Поскольку $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ полностью антисимметричен, а элементы матрицы $A^b{}_a$ коммутативны, это выражение полностью антисимметрично по индексам b_1. Но это значит, что оно пропорционально $\epsilon^{b_1 \dots b_n}$. Назовем коэффициент пропорциональности детерминантом $A^b{}_a$

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{a_n} := \det |A| \epsilon^{b_1 \dots b_n} \tag{9.16}$$

и проверим, что он обладает свойством мультипликативности. Действительно, с одной стороны, по определению,

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}{}_{c_1} B^{c_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{c_n} B^{c_n}{}_{a_n} = \det |AB| \epsilon^{b_1 \dots b_n} \,. \tag{9.17}$$

С другой,

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} A^{b_1}{}_{c_1} B^{c_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{c_n} B^{c_n}{}_{a_n} = \det |B| \epsilon^{c_1 \dots c_n} A^{b_1}{}_{c_1} \dots A^{b_n}{}_{c_n} = \det |B| \det |A| \epsilon^{b_1 \dots b_n} \,, \tag{9.18}$$

т.е.,

$$\det |AB| = \det |A| \det |B| \,. \tag{9.19}$$

Остается заметить, что нормировка в (9.16) выбрана так, что $\det |\delta^n_m| = 1$. Кроме того, из формулы (9.16) следует, что

$$\det |A| = \frac{1}{n!} \epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n} A^{b_1}{}_{a_1} \dots A^{b_n}{}_{a_n} \tag{9.20}$$

($\epsilon_{b_1 \dots b_n}$ с нижними индексами определяется аналогично $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ или может быть получен из последнего путем опускания индексов при наличии метрики с единичным детерминантом).

Задача 9.11. Доказать. Убедится, что эта формула приводит к обычному определению детерминанта.

Важное следствие этого анализа состоит в том, что $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ и $\epsilon_{b_1 \dots b_n}$ являются инвариантами группы $SL(n)$.

Задача 9.12. Доказать

9.4 Вектор Паули-Любанского

Возвращаясь к анализу $iso(3,1)$-модулей, заключаем, что для неприводимых модулей (=элементарных частиц) должно быть выполнено условие

$$P_a P^a \phi + m^2 \phi = 0 \tag{9.21}$$

эквивалентное уравнению КГФ. Итак, уравнение КГФ всегда должно выполняться для элементарных частиц в релятивистской теории.

В случае $m^2 \geq 0$ параметр m действительно описывает массу покоя частицы. Случай $m^2 < 0$ физически менее интересен. Он отвечает тахионам.

Задача 9.13. Убедиться, что тахионы всегда двигаются со скоростью больше скорости света.

На другом языке, тахионы отвечают неустойчивым системам, у которых энергия не ограничена снизу (опрокинутый потенциал). В природе не встречаются - наверное все улетели.

Важный вопрос - какие еще операторы Казимира есть у $iso(3,1)$? Чтобы построить еще один оператор Казимира c_4 введем так называемый *вектор Паули-Любанского*

$$W^a := \epsilon^{abcd} P_b L_{cd} \tag{9.22}$$

Отметим, что в такой форме эту формулу удобно применять в четырехмерном пространстве. При $d > 4$ удобнее использовать полностью антисимметричный тензор третьего ранга

$$W_{abc} := P_a L_{bc} + P_b L_{ca} + P_c L_{ab} \,. \tag{9.23}$$

Замечу, что вектор Паули-Любанского принадлежит универсальной обертывающей $U(iso(3,1)$.

Теперь надо проверить два свойства.

1. W^a является вектором по отношению к преобразованиям Лоренца. В инфинитезимальной форме это условие имеет вид

$$[L_{ab}, W^c] = \delta^c_b W_a - \delta^c_a W_b \tag{9.24}$$

Задача 9.14. Доказать, используя свойства антисимметричного тензора, или доказать, что W_{abc} - тензор

2. W^a коммутирует с оператором сдвига

$$[P_a \,, W^b] = 0 \tag{9.25}$$

Задача 9.15. Доказать, используя определяющие соотношения алгебры Ли $iso(3,1)$.

В результате, получаем четвертичный оператор Казимира

$$c_4 := W^a W_a \,. \tag{9.26}$$

Задача 9.16. Убедиться, что

$$[P_a \,, c_4] = 0 \,, \qquad [L_{ab} \,, c_4] = 0 \,. \tag{9.27}$$

В четырехмерном случае существует только два оператора Казимира - c_2 и c_4. В бóльших размерностях их больше: именно c_2, c_4, $\ldots c_{2[d/2]}$.

Задача 9.17. Построить c_6 из тензора Паули-Любанского

В четырехмерном случае различные типы элементарных частиц характеризуются двумя числами - массой и спином. Масса связана с c_2, а спин с c_4:

$$c_4 = m^2 s(s+1) \,, \qquad s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots \tag{9.28}$$

Задача 9.18. Проверить для скалярного поля, что оно обладает спином 0

Полученные результаты указывают на то, что релятивистских полей существует бесконечно много. Используя теорию представлений, не очень трудно описать их все. Мы сделаем это в следующем семестре. А пока займемся следующим примером релятивистского поля спина 1/2 - поля Дирака. Это поле описывает электрон. Для этого нам придется изучить понятие спиноров, тесно связанное с алгеброй Клиффорда, которая имеет множество приложений как в физике, так и в математике.