1 Лекция 5. (Мисуна Н.Г.) 1 курс, 2 семестр, 14 Марта 2019

1.1 Группа движений евклидова пространства

Как было разобрано в предыдущей лекции, общее движение $\mathbb{R}^n$ можно задать в виде комбинации поворота и сдвига

$$x^i \longrightarrow x'^i = A^i{}_j x^j + a^i, \qquad i, j = 1, ...n, \tag{1}$$

где матрица $A^i{}_j$ принадлежит ортогональной группе $O(n)$. Совокупность таких преобразований образует группу движений n-мерного евклидова пространства, обозначаемую как $E(n)$.

Задача 5.1. Найти $\dim E(n)$.

Обозначая сдвиг на a^i как t_a и поворот, задаваемый матрицей $A^i{}_j$, как M_A^0, видим, что любой элемент $E(n)$ представляется в виде

$$G_{A,a} = t_a M_A^0. \tag{2}$$

Рассмотрим преобразование $M_A^a = t_a M_A^0 t_a^{-1}$, которое реализуется как

$$x'^i = A^i{}_j \left(x^j - a^j\right) + a^i. \tag{3}$$

Оно описывает поворот вокруг оси, проходящей через точку $x^i = a^i$, поскольку она остается неподвижной. (Отметим, что, как легко видеть, у чистых (т.е. нетривиальных) сдвигов неподвижных точек нет.) Таким образом, мы заключаем, что поворот вокруг точки a^i сводится к такому же повороту вокруг начала координат в комбинации со сдвигом на $(a^i - A^i{}_j a^j)$

$$x'^i = A^i{}_j x^j + \left(a^i - A^i{}_j a^j\right). \tag{4}$$

Вследствие этого группа $E(n)$ порождается сдвигами и поворотами вокруг *любой* точки.

Рассмотрим далее преобразование $M_A^0 t_a M_{A^{-1}}^0$, имеющее вид

$$x'^i = A^i{}_j \left(A^{-1j}{}_k x^k + a^j\right) = x^i + A^i{}_j a^j. \tag{5}$$

Отсюда мы видим, что $M_A^0 t_a M_{A^{-1}}^0 = t_{Aa}$, т.е. M_A^0 и t_a некоммутативны. В частности, поменяв в (2) t_a и M_A^0 местами, мы получим другой элемент $E(n)$.

Так как для сдвигов также выполняется $t_b t_a t_{-b} = t_a$, то отсюда следует, что подгруппа сдвигов $T(n)$ является *нормальным делителем* $E(n)$. Общее определение звучит так: подгруппа H группы G называется *нормальным делителем* G, если $ghg^{-1} \in H$, $\forall h \in H$, $\forall g \in G$. Или, по-другому, H – нормальный делитель, если *коммутатор* $ghg^{-1}h^{-1}$ любого его элемента h с любым элементом $g \in G$ остается лежать в H.

Задача 5.2. Доказать, что $H = M_A^0$ не является нормальным делителем $E(n)$.

Группа $E(n)$ действует в $\mathbb{R}^n$. Напомню, что *орбитой* точки x под действием группы G называется множество точек Gx. Легко видеть, что орбитой любой точки $\mathbb{R}^n$ под действием $E(n)$, а также под действием подгруппы сдвигов $T(n)$, является все пространство $\mathbb{R}^n$. А как выглядят орбиты точек $\mathbb{R}^n$ под действием группы $O(n)$, реализованной в виде преобразований вида M_A^0? Они представляют собой $(n-1)$-мерные сферы S^{n-1} радиуса R, если соответствующие x находятся на расстоянии R от начала координат. Вследствие этого $O(n)$ является группой движений S^{n-1}. Размерность ортогональной группы есть $\dim O(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Сравните ее с размерностью $E(n)$ и проинтерпретируйте геометрически полученный результат.

Рассмотрим окружность S^1 и функции на ней: $f(\varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$ – угол. Поворот на этом языке – это сдвиг $\varphi \longrightarrow (\varphi + \psi) \bmod 2\pi$, где ψ – другой угол. Таким образом, $SO(2)$ – это трансляция с периодической координатой.

Какие еще преобразования, помимо движений, можно рассматривать? Можно, например, рассмотреть совокупность преобразований, от которых требуются только гладкость и взаимооднозначность. Они называются *диффеоморфизмами*. Диффеоморфизмы многоообразий типа плоскости или окружности можно представлять себе как растяжения и сжатия резинки соответствующей топологии.

Существует также важный класс *конформных преобразований*, которые если и меняют расстояние, то только на множитель. Имеется два типа таких преобразований:

(1) дилатации $x'^i = ax^i,\ a \in \mathbb{R}$,

(2) инверсии $x'^i = bx^i/x^2,\ b \in \mathbb{R}$.

Задача 5.3. Проверить.

Рассмотренные нами группы $E(n)$, $T(n)$ и $O(n)$ представляют собой примеры *групп Ли*, т.е. групп, элементы которых задаются непрерывными параметрами (координатами). Таким образом, группы Ли представяют собой многообразия (поверхности), которые действуют сами на себе.

Примеры:

(1) группа сдвигов $T(n)$ сама представляет собой пространство $\mathbb{R}^n$ (каждая точка $\mathbb{R}^n$ задает сдвиг в $\mathbb{R}^n$) и действует на себе естественным образом: $t_a b^i = b^i + a^i$;

(2) каждая точка ψ окружности S^1 задает сдвиг S^1: $t_\psi \varphi = (\varphi + \psi) \bmod 2\pi$;

(3) $O(n)$ – это поверхность, вложенная в $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами $X^I{}_J$, удовлетворяющая условию ортогональности. Это условие аналогично уравнению сферы $x_i x^i = R^2$, но, в отличие от последнего, допускает действие на себе. Действие может быть задано двумя способами: левые сдвиги $X'^I{}_J = A^I{}_K X^K{}_J$ или правые сдвиги $X'^I{}_J = X^I{}_K A^{-1K}{}_J$.

1.2 Однородные пространства

Пространство M, на котором задано действие группы G, называется G-*однородным*, если $\forall x_1, x_2 \in M$ найдется $g \in G$, такой, что $x_1 = gx_2$. Иными словами, пространство G-однородно, если G переводит любую его точку в любую другую. Важная теорема, которую мы не будем доказывать, гласит:

Все G-однородные пространства M являются косетами $M = G/H$, где H – группа стабильности (симметрии) любой точки M.

Задача 5.4. Доказать, что H не зависит от выбора точки в G-однородном M.

Таким образом, однородные пространства можно описывать на теоретико-групповом языке. Например, согласно рассмотренной теореме, $S^n = SO(n+1)/SO(n)$. Другой пример связан с действием $E(n)$ на $\mathbb{R}^n$, которое, очевидно, однородно. Подгруппа стабильности точки $x^i = 0$ – это $O(n)$. Согласно теореме, отсюда следует, что $\mathbb{R}^n = E(n)/O(n)$. Действительно, из общего вида действия (1) находим, что $E(n)/O(n) = T(n)$, а подгруппа сдвигов $T(n)$ как многообразие представляет собой именно $\mathbb{R}^n$, как мы уже разбирали.

Имеет место и другое схожее соотношение. А именно, поскольку $T(n)$ есть нормальный делитель $E(n)$, то косет $E(n)/T(n)$ должен образовывать группу. Действительно, из (1) видно, что $E(n)/T(n) = O(n)$. Отмечу, что из полученных соотношений $E(n)/O(n) = T(n)$ и $E(n)/T(n) = O(n)$ вовсе не следует, что $E(n) \stackrel{?}{=} O(n) \otimes T(n)$ – с косетами нельзя (за исключением специальных случаев) обращаться как с арифметическими дробями!