Def: Алгебра l с произведением, обозначаемым $[a\,,b] \quad \forall a,b \in l$, называется алгеброй Ли, если произведение антисимметрично

$$[a\,,b] = -[b\,,a] \tag{5.15}$$

и для любых $a,b,c \in l$ выполняется тождество Якоби (5.14), (которое является тождеством только если $[\,,]$ - коммутатор, построенный по ассоциативному произведению согласно (5.13)).

Пусть t_i - некоторый базис алгебры Ли l. Тогда должны выполняться соотношения (5.12) с некоторыми структурными коэффициентами f^k_{ij}, которые антисимметричны

$$f^k_{ij} = -f^k_{ji} \tag{5.16}$$

и удовлетворяют тождеству Якоби в форме

$$f^l_{ij}f^n_{lk} + f^l_{jk}f^n_{li} + f^l_{ki}f^n_{lj} = 0\,. \tag{5.17}$$

Задача 5.4. Проверить.

Представлением алгебры Ли l называется ее реализация матрицами ${t_i}^\alpha{}_\beta$ с с лиевским произведением, реализованным матричным коммутатором.

Модулем алгебры Ли l называется линейное пространство V, в котором элементы l действуют как линейные операторы согласно (5.2).

Важным следствием описанной конструкции является то, что всякая группа Ли G порождает алгебру Ли g, и всякий G-модуль порождает g-модуль. Идея в том, чтобы вместо групп изучать их алгебры Ли, а вместо G-модулей изучать g-модули, так как часто это проще.

Мы применим эту идею к различным симметриям, включающим группу движений $\mathbb{R}^n$ и релятивистским симметриям, что позволит нам вскоре построить спинорное представление этих симметрий.

При этом важно помнить, что, вообще говоря, алгебры Ли характеризуют порождающие их группы Ли не полностью. В частности, могут существовать разные группы Ли, обладающие одной алгеброй Ли.

Задача 5.5. Привести пример.

5.2 Примеры алгебр Ли

5.2.1 gl(n)

Группа $GL(n)$ это группа невырожденных (обратимых) матриц $a^i{}_j$, $i,j = 1,\dots n$. Элемент $g \in G$ близкий к единичному имеет вид

$$g^i{}_j = \delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j\,, \tag{5.18}$$

где $t^i{}_j$ - любая матрица, а параметр ε бесконечно мал. Поэтому алгебра Ли $gl(n)$ - это алгебра всевозможных матриц $n \times n$ с матричным произведением (5.11) в качестве лиевского произведения.

Задача 5.6. Какова размерность $gl(n)$?

Введем базис в $gl(n)$ следующим образом. $(e^a{}_b)^i{}_j$ - матрица с единственным отличным от нуля элементом, расположенном на пересечении a-й строки и b-ого столбца. Здесь a и b нумеруют разные элементы в пространстве матриц, а i и j нумеруют элементы данной матрицы при фиксированных a и b.

Задача 5.7. Убедиться, что $(e^a{}_b)^i{}_j$ образуют базис в пространстве матриц.

Матрицу $(e^a{}_b)^i{}_j$ удобно представить в виде

$$(e^a{}_b)^i{}_j = \delta^a_j \delta^i_b \qquad (5.19)$$

Задача 5.8. Убедиться, что в этом базисе

$$e^a{}_b e^c{}_d = \delta^a_d \, e^c{}_b \qquad (5.20)$$

и, следовательно,

$$[e^a{}_b \, , e^c{}_d] = \delta^a_d \, e^c{}_b - \delta^c_b e^a{}_d \, . \qquad (5.21)$$

Формула (5.21) задает определяющие соотношения алгебры Ли $gl(n)$. Ее надо помнить как таблицу умножения. Мы вывели эту формулу в тавтологическом (матричном) представлении $gl(n)$. Но у $gl(n)$ есть много других представлений. Во всех этих представлениях существует базис, в котором определяющие соотношения $gl(n)$ имеют вид (5.21).

5.2.2 sl(n)

$SL(n)$ - это группа матриц с единичным детерминантом. Детерминант единичной матрицы равен единице.

Задача 5.9. Доказать, что

$$\det |\delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j| = 1 + \varepsilon t^i{}_i + o(\varepsilon^2) \qquad (5.22)$$

Алгебра Ли $sl(n)$ это алгебра коммутаторов матриц с нулевым следом

$$tr(t) := t^i{}_i = 0 \, . \qquad (5.23)$$

Задача 5.10. Убедиться, что матрицы с нулевым следом образуют алгебру Ли, с помощью следующей Леммы:

Задача 5.11. Доказать Лемму: коммутатор $[a \, , b]$ имеет нулевой след для любых матриц a и b

$$tr([a \, , b]) = 0 \, . \qquad (5.24)$$

С более общей точки зрения соотношение (5.24) служит определением следа для произвольной ассоциативной алгебры: следом $tr(a)$ ассоциативной алгебры A называется любое линейное отображение $A \to \mathbb{K}$ в поле над которым построена A, удовлетворяющее условию

$$tr(a \circ b) = tr(b \circ a) \qquad \forall a, b \in A \, . \qquad (5.25)$$

6 Лекция 8. 1 курс, 2 семестр, 04 Апреля 2019

6.1 Алгебры Ли - продолжение

6.1.1 $o(n)$

В определяющих соотношениях ортогональной группы (4.11)

$$A^i{}_k A^j{}_l \delta_{ij} = \delta_{kl} \tag{6.1}$$

положим

$$A^i{}_j = \delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j\,. \tag{6.2}$$

В линейном по ε приближении это дает условия

$$\delta_{ij} t^i{}_k \delta^j_l + \delta_{ij} \delta^i_k t^j{}_l = 0\,, \tag{6.3}$$

что эквивалентно

$$\delta_{il} t^i{}_k + \delta_{jk} t^j{}_l = 0\,. \tag{6.4}$$

Вводя обозначение

$$t_{lk} := \delta_{il} t^i{}_k \tag{6.5}$$

получаем условие

$$t_{lk} + t_{kl} = 0\,. \tag{6.6}$$

Это означает, что алгебра Ли $o(n)$ описывается антисимметричными матрицами

$$t_{ij} = -t_{ji}\,. \tag{6.7}$$

Задача 6.1. Убедиться, что коммутатор антисимметричных матриц дает антисимметричную матрицу, т.е. $o(n)$ действительно алгебра Ли.

В качестве базиса $o(n)$ можно выбрать антисимметричные матрицы

$$t_{ab} := \delta_{ac} e^c{}_b - \delta_{bc} e^c{}_a \tag{6.8}$$

Задача 6.2. Найти определяющие соотношения алгебры Ли $o(n)$

С помощью (5.21) легко убедиться, что

$$[t_{ab}\,, t_{cd}] = -\delta_{bc} t_{ad} + \delta_{ac} t_{bd} + \delta_{bd} t_{ac} - \delta_{ad} t_{bc}\,. \tag{6.9}$$

6.1.2 sp(2n)

Симплектическая группа $SP(2n)$ определяется соотношениями похожими на (4.11) с заменой симметричной метрики δ_{ij} на антисимметричную невырожденную форму $C_{ij} = -C_{ji}$

$$A^i{}_k A^j{}_l C_{ij} = C_{kl} \tag{6.10}$$

Задача 6.3. Вычислить размерность $SP(2n)$

Задача 6.4. Найти матричную реализацию алгебры Ли $sp(2n)$

Алгебры $sl(n)$, $o(n)$, $sp(2n)$ исчерпывают четыре бесконечные серии классических простых алгебр по классификации Картана (над комплексным полем). При этом алгебры $o(n)$ при четных и нечетных n различаются. Кроме этих алгебр есть еще пять исключительных алгебр Ли g_2, f_4, e_6, e_7, e_8.

Задача 6.5. Убедиться, что алгебра $gl(n)$ не простая.

6.1.3 Вещественные алгебры

Классификация алгебр Ли над вещественным полем более сложна. Так вместо (6.10) можно написать

$$A^i{}_k A^j{}_l \eta_{ij} = \eta_{kl}\,, \tag{6.11}$$

где η_{ij} произвольная невырожденная симметричная матрица (форма). Переходя от η_{kl} к

$$\eta'_{ij} = U_i{}^k U_j^l \eta_{kl}\,, \tag{6.12}$$

мы лишь меняем базис в пространстве, где действуют повороты. Это значит, что уравнения (6.11) с η_{kl} и η'_{kl}, связанными (6.12), описывают одну и ту же алгебру Ли. Из курса линейной алгебры известно, что классы эквивалентности по отношению к преобразованию (6.12) определяются индексом инерции равным разности числа положительных и отрицательных собственных значений. Иными словами, в качестве представителей разных классов эквивалентности можно взять

$$\eta_{ij} = \delta_{ij} \quad i,j = 1,\dots p \tag{6.13}$$

$$\eta_{ij} = -\delta_{ij} \quad i,j = p+1,\dots p+q\,, \tag{6.14}$$

и $\eta_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Матрицы $A^i{}_j$, удовлетворяющие (6.11), образуют *псевдоортогональную* группу $O(p,q)$. Соответствующая алгебра Ли обозначается $so(p,q)$.

Задача 6.6. Доказать, что $so(p,q) = so(q,p)$

Задача 6.7. Найти структурные соотношения $so(p,q)$

Определение: Алгебра l_r называется вещественной формой комплексной алгебры l_c, если последняя получается из l_r в результате замены поля вещественных чисел на поле комплексных чисел.

Алгебры $so(p,q)$ (с $q > p$) задают различные вещественные формы комплексной алгебры $o(p+q|\mathbb{C})$.

Задача 6.8. Доказать

Аналогично, различные вещественные формы $sl(n|\mathbb{C})$ обозначаются $sl(n|\mathbb{R})$ и $su(p,q)$ ($p+q = n$). $sp(2n|\mathbb{C})$ также допускает различные вещественные формы.

6.2 Симметрии специальной теории относительности

Специальная теория относительности была построена в 1905 году как результат разрешения парадокса теории электромагнетизма Максвелла, построенной в середине 19 века и предсказывавшей, что скорость распространения света не зависит от системы отсчета. На это ушло много усилий лучших умов своего времени таких как Эйнштейн, Лоренца, Пуанкаре и других. С современной точки зрения кажется удивительным, что это заняло так много времени. Во многом причина в том, что не был развит необходимый математический аппарат, связанный в первую очередь с теорией групп. Сейчас мы попробуем в этом убедиться.

Итак, световой сигнал распространяется по закону

$$x^i = x_0^i + tv^i \,, \qquad v^i v^j \delta_{ij} = c^2 \,, \tag{6.15}$$

где c скорость света, которая является мировой константой. Размерность c есть cm/sec. Бывает удобно выбрать систему единиц, в которой $c = 1$, что означает, что и расстояние и время измеряется одними единицами.

Задача 6.9. Чему равна единица времени $1cm$?

После этого время и пространственные координаты становятся настолько похожими, что их удобно рассматривать как единый 4-вектор

$$x^a := (x^0, x^i) \,, \qquad x^0 := t \,, \qquad a = 0, 1, 2, 3 \,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{6.16}$$

x^a удобно понимать как координаты единого пространства-времени, называемого *пространством Минковского.*

Из формулы (6.15) следует, что *интервал* между точками x^a и x_0^a

$$s^2 := (x^0 - x_0^0)^2 - (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)\delta_{ij} \tag{6.17}$$

не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой. Строго говоря, это не совсем так, поскольку анализ распространения света говорит лишь, что если интервал равнялся нулю в одной системе отсчета - он будет равняться нулю и в любой другой. Например, интервал мог бы умножаться на число при переходе от одной системе к другой, т.е. отличаться на конформное преобразование. Но минимальная симметрия, совместимая с независимостью закона распространения света от системы отсчета, требует инвариантности интервала.

Групповой смысл специальной теории относительности сильно упрощается, если ввести *метрику Минковского* η_{ab} с ненулевыми компонентами

$$\eta_{00} = 1 \,, \qquad \eta_{ij} = -\delta_{ij} \,. \tag{6.18}$$

Теперь интервал между точками пространства Минковского с координатами y^a и x^a приобретает простой вид

$$s^2 = \eta_{ab}(x^a - y^a)(x^b - y^b) \tag{6.19}$$

Преобразования СТО есть ни что иное как движения пространства-времени Минковского. Группа движений пространства Минковского называется группой Пуанкаре и обозначается $ISO(1,3)$. Она включает группу Лоренца псевдо-ортогональных преобразований $O(1,3)$ координат x^a и группу пространственно-временных трансляций

$$x'^a = A^a{}_b x^b + a^a\,, \qquad \eta_{ac} A^a{}_b A^c{}_d = \eta_{bd}\,. \tag{6.20}$$

Здесь $A^a{}_b$ описывает преобразования Лоренца, а a^a пространственно-временные трансляции.

Задача 6.10. Каковы размерности группы Лоренца и группы Пуанкаре?

Задача 6.11. Найти нормальный делитель группы Пуанкаре

Группа Лоренца содержит обычные пространственные вращения и отражения, а также бусты - преобразования перехода от одной системы отсчета к другой. Явный вид бустов найти не сложнее, чем на лекции 4 мы вывели формулы преобразований при поворотах.

Рассмотрим случай, когда одна система движется относительно другой вдоль оси x^1. В этом случае матрица отличается от единичной только в компонентах $A^a{}_b$ с $a,b=0,1$. Условие (6.20) дает три условия

$$(A^0{}_0)^2 - (A^1{}_0)^2 = 1\,, \tag{6.21}$$

$$(A^1{}_1)^2 - (A^0{}_1)^2 = 1\,, \tag{6.22}$$

$$A^0{}_0 A^0{}_1 - A^1{}_0 A^1{}_1 = 0\,. \tag{6.23}$$

Первые два соотношения решаются аналогично случаю группы вращений, разобранному в Лекции 4,

$$A^0{}_0 = a\cosh(\phi_1)\,, \qquad A^1{}_0 = \mathrm{sh}(\phi_1)\,, \qquad a^2 = 1\,, \tag{6.24}$$

$$A^1{}_1 = b\cosh(\phi_2)\,, \qquad A^0{}_1 = \mathrm{sh}(\phi_2)\,, \qquad b^2 = 1\,. \tag{6.25}$$

Здесь знаки $a=-1$ и $b=-1$ в первом и втором соотношениях отвечают отражениям времени и пространства, соответственно. Рассмотрим случай $a=b=1$. Тогда третье соотношение дает

$$\cosh(\phi_1)\,\mathrm{sh}(\phi_2) - \cosh(\phi_2)\,\mathrm{sh}(\phi_1) = 2\,\mathrm{sh}(\phi_2 - \phi_1) = 0 \tag{6.26}$$

откуда следует $\phi_1 = \phi_2 = \phi$.

Это дает

$$x'^0 = \cosh(\phi)x^0 + \mathrm{sh}(\phi)x^1\,, \tag{6.27}$$

$$x'^1 = \cosh(\phi)x^1 + \mathrm{sh}(\phi)x^0\,, \tag{6.28}$$

Из второго соотношения следует, что скорость движения начала координат штрихованной системы отсчета относительно нештрихованной

$$v = \frac{\mathrm{sh}(\phi)}{\cosh(\phi)}\,. \tag{6.29}$$

Заметим, что $|v|$ всегда меньше единицы, т.е. скорость движения одной системы относительно другой не может превышать скорость света.

Задача 6.12. Показать, что

$$\cosh(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad \mathrm{sh}(\phi) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6.30}$$

Подстановка этих выражений в (6.27) и (6.28) дает обычные преобразования Лоренца при переходе от одной системы отсчета к другой.

В нерелятивистской механике динамика материальной точки характеризуется энергией и импульсом. Релятивистское обобщение дается четыре вектором импульса P^a, который определяется следующим образом:

$$P^a := m\frac{dx^a}{ds}\,, \qquad ds := \sqrt{dx^a dx^b \eta_{ab}} = dt\sqrt{1-v^2}\,. \tag{6.31}$$

В результате,

$$P^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\,, \qquad P^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6.32}$$

Поскольку P^a преобразуется как вектор $P^aP^b\eta_{ab}$ является инвариантом группы Лоренца, т.е. не зависит от выбора системы отсчета. Значит

$$P^aP^b\eta_{ab} = m^2 \tag{6.33}$$

Задача 6.13. Доказать

Разлагая P^0, отождествляемое с энергией, с точностью до второго порядка получаем

$$P^0 = m + \frac{mv^2}{2} + o(v^3) \tag{6.34}$$

Учитывая, что $c = 1$ эта формула и означает, что $E = mc^2$ в системе покоя. Замечу, что первая поправка в точности совпадает с нерелятивистской кинетической энергией.

В нерелятивизме энергия не смешивается с импульсом и поэтому определена с точностью до константы. В СТО это уже не так, так как энергия является компонентой 4-вектора.