Лекция 12.
1 курс, 2 семестр, 16 мая 2019. Задачи на лето

12.1 Вариационное исчисление и принцип наименьшего действия

12.1.1 Вариационное исчисление

Функционалом $F(f)$ называется отображение из некоторого пространства функций Φ в поле вещественных ($\mathbb{R}$) или комплексных ($\mathbb{C}$) чисел. Иными словами, функционал это функция от функций. Примерами функциональных пространств Φ, с которыми часто приходится сталкиваться в приложениях, являются пространство $\mathcal{P}$ полиномов одной или нескольких переменных x или пространство L_2 функций интегрируемых с квадратом

$$\|f\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} dx (f(x))^2 < \infty \,. \tag{12.1}$$

norm

$\|f\|$ называется нормой $f(x)$ в L_2.

Задача 12.1. Доказать, что $\mathcal{P}$ и L_2 образуют линейные пространства над $\mathbb{R}$.

Надо отметить, что $\mathcal{P}$ и L_2 существенно отличаются друг от друга тем, что L_2 является полным пространством в смысле функционального анализа, а $\mathcal{P}$ - нет.[1]

Простейшим примером функционала является обычный интеграл

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \,, \tag{12.2}$$

сопоставляющий каждой функции число. Более общие примеры функционалов от дифференцируемых функций имеют вид

$$F_{mn}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\partial^m f(x))^n \,. \tag{12.3}$$

Любая функция от функционалов также задает функционал. Например, линейная комбинация функционалов $F_{mn}(f)$ с произвольными коэффициентами также является функционалом.

Вариационное исчисление служит обобщением дифференциального исчисления функций на случай функционалов. Также как в дифференциальном исчислении, вариационная производная описывает отклик функционала $F(f)$ на бесконечно малое приращение аргумента

$$f(x) \to f(x) + \delta f(x) \,, \tag{12.4}$$

где $\delta f(x)$ является произвольным бесконечно малым приращением аналогичным Δx для обычного определения производной функции

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + o(\Delta x) \,. \tag{12.5}$$

dif

[1]Пространство является полным, если оно содержит пределы всех сходящиеся по норме последовательности. В случае $\mathcal{P}$ норма вообще не определена.

В случае функциональной производной, однако, требуется уточнение класса функций, которому принадлежит $\delta f(x)$. Стандартное определение состоит в том, что

$$\delta f(x) \in \mathcal{D}\,, \tag{12.6}$$

где класс $\mathcal{D}$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций $g(x)$ с компактным носителем. Последнее означает, что $g(x)$ может быть отлично от нуля только в ограниченной области пространства координат x, т.е. не более чем в некотором отрезке на $\mathbb{R}$ для функций одной переменной или n-мерном кубе в случае функций в $\mathbb{R}^n$.

Поскольку определение класса $\mathcal{D}$ не вполне тривиально и поучительно, приведу пример функции $g(x) \in \mathcal{D}$. Он строится следующим образом. Пусть $h(x)$ - некоторая бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$. Ведем функцию

$$\begin{aligned} &h_1(x) := 0 \quad x \leq 0\,, \\ &h_1(x) := h(x) \exp -x^{-2} \quad x > 0\,. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Убедиться, что $h_1(x)$ бесконечно дифференцируема и все ее производные равны нулю при $x \leq 0$. Остается ввести функцию

$$\begin{aligned} &h_2(x) := 0 \quad x \geq a > 0\,, \\ &h_2(x) := h_1(x) \exp -(x-a)^{-2} \quad x < a\,. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Задача 12.2. Убедиться, что $h_2(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией равной нулю вне отрезка $[0, a]$, т.е. $h_2(x) \in \mathcal{D}$.

Обобщение этой конструкции на многомерный случай функций на $\mathbb{R}^n$ очевидно.
Задача 12.3. Проделать.

Важное замечание: Произведение $f(x)g(x)$, где $f(x)$ - произвольная бесконечно дифференцируемая функция (например, полином или экспонента), а $g \in \mathcal{D}$ также принадлежит $\mathcal{D}$.
Задача 12.4. Убедиться.

Задача 12.5. Убедиться, что пространство бесконечно дифференцируемых функций, обозначаемое C^∞, образует коммутативную ассоциативную алгебру.

Задача 12.6. Убедиться, что пространство $\mathcal{D}$ образует коммутативную ассоциативную алгебру.

Очевидно, $\mathcal{D}$ является подалгеброй C^∞.
Задача 12.7. Доказать, что $\mathcal{D}$ является двусторонним идеалом C^∞.

Важнейшим свойством функций из класса $\mathcal{D}$ является то, что интегрирование по частям выражений, содержащих факторы из класса $\mathcal{D}$, не дает граничных членов при $x \to \pm\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} g(x) f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) , \quad \forall g \in \mathcal{D} \tag{12.9}$$

поскольку $g(x) = 0$ при $|x| > a$ для некоторого $a > 0$.

Теперь мы можем дать определение вариационной производной с помощью формулы аналогичной (12.5)

$$F(f(x) + \delta f(x)) - F(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta f(x) \frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} + o(\delta f(x)) . \tag{12.10}$$

Подчеркну, что вариационная производная является функционалом, зависящим от точки x. Старшие производные определяются последовательно как производные младших

$$\frac{\delta^2 F(f)}{\delta f(x) \delta f(y)} := \frac{\delta}{\delta f(y)} \left(\frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} \right) . \tag{12.11}$$

Задача 12.8. Доказать, что вторая вариационная производная симметрична

$$\frac{\delta^2 F(f)}{\delta f(x) \delta f(y)} = \frac{\delta^2 F(f)}{\delta f(y) \delta f(x)} . \tag{12.12}$$

Задача 12.9. Вычислить вариационную производную функционала

$$F_{0n}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (f(x))^n . \tag{12.13}$$

Задача 12.10. Вычислить вариационную производную функционала

$$F_{11}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} f(x) . \tag{12.14}$$

Задача 12.11. Обобщить все формулы на случай функций в многомерном пространстве.

12.1.2 Принцип наименьшего действия

Большинство динамических уравнений описываются *принципом наименьшего действия*. Именно, пусть $y^\alpha(x^a)$ - набор динамических переменных. Принцип наименьшего действия гласит, что существует такой *функционал действия* $S(y(x))$, что уравнения движения имеют вид

$$\frac{\delta S(y(x))}{\delta y^\alpha(x)} = 0 . \tag{12.15}$$

Также как для обычных функций, принцип наименьшего действия означает, что на решениях таких уравнений действие достигает локального экстремума - не всегда минимума или максимума.

Задача 12.12. Объяснить какие еще варианты возможны.

В этом смысле название "принцип наименьшего действия"не всегда точно.

Принцип наименьшего действия является глубоким принципом фундаментальных физических теорий. Его смысл отчасти проясняется квантовой механикой, но полное понимание вероятно еще впереди.

Рассмотрим уравнения Ньютона в потенциальном поле сил. В этом случае имеется одна координата - параметр времени $x = t$ - и набор координат материальной точки $y^\alpha(t)$. Уравнения Ньютона имеют вид

$$m\ddot{y}^\alpha(t) = -\frac{\partial}{\partial y^\alpha} V(y(t))\,, \tag{12.16}$$

где $V(y)$ - потенциальная энергия.

Задача 12.13. Найти действие, приводящее к этим уравнениям.

Задача 12.14. Найти действие свободной релятивистской материальной точки.

Задача 12.15. Найти действие, приводящее к уравнению КГФ с массой m. В этом случае, x^a - координаты пространства Минковского, а $y^\alpha(x)$ - отождествляется со скалярным полем $\phi(x)$.

12.2 Двойственность Ходжа и самодуальность

Напомню, что символ Леви-Чивита $\epsilon^{a_1 a_2 \dots a_d}$ определяется как полностью антисимметричный тензор, нормированный условием $\epsilon^{1\,2\,\dots d} = \pm 1$ - выбор знака является вопросом удобстваю (d - число значений, принимаемых индексами a. В случае пространства Минковского индексы принимают значения от 0 до $d-1$.) Двойственность Ходжа требует введения невырожденной метрики η_{ab} с обратной η^{ab}, позволяющей поднимать и опускать индексы.

Пусть Λ_p - линейное пространство полностью антисимметричных тензоров ранга p

$$T_{a_1\dots a_p}: \qquad T_{\dots a \dots b \dots} = -T_{\dots b \dots a \dots} \tag{12.17}$$

Такие тензоры также называются дифференциальными формами степени p и играют важную роль в дифференциальной геометрии, как мы узнаем в следующем семестре.

Двойственность Ходжа задает отображение, обозначаемое символом $*$, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между Λ_p и Λ_{d-p} по следующему закону:

$$T^*_{a_1\dots a_{d-p}} := \frac{1}{p!}\epsilon_{a_1\dots a_{d-p}}{}^{b_1\dots b_p} T_{b_1\dots b_p}\,. \tag{12.18}$$

В этой формуле важно наличие метрики, опускающей индексы у символа Леви-Чивита. Очевидно, двойное применение отображение Ходжа отображает Λ_p в себя. Оказывается, что

$$T^{**}_{b_1\dots b_p} = \alpha(p,d,\Delta) T_{b_1\dots b_p}\,, \tag{12.19}$$

где коэффициент $\alpha(p,d,\Delta)$ зависит от степени формы p, размерности d и индекса инерции

$$\Delta := n_+ - n_-\,, \tag{12.20}$$

где n_+ и n_- - числа положительных и отрицательных собственных значений метрики η_{ab}, соответственно ($n_+ + n_- = d$). Оказывается, что $\alpha^2(p,d,\Delta) = 1$, т.е. $\alpha(p,d,\Delta) = \pm 1$.

Задача 12.16. Найти $\alpha(p,d,\Delta)$.

Рассмотрим теперь случай четного $d = 2m$. В этом случае существуют формы степени $p = \frac{d}{2} = m$ и

$$\Lambda^*_m = \Lambda_m\,. \tag{12.21}$$

Задача 12.17. Доказать изоморфизм.

В этом случае можно попробовать наложить дополнительное условие (анти)самодуальности

$$T^*_{a_1\dots a_m} = \pm T_{a_1\dots a_m} \tag{12.22}$$

Если $\alpha(\frac{d}{2},d,\Delta) = -1$, то из этого условия вытекает $T_{a_1\dots a_m} = 0$

Задача 12.18. Доказать.

Если же $\alpha(\frac{d}{2},d,\Delta) = 1$, то условие (анти)самодуальности оказывается нетривиальным.

Задача 12.19. Построить проекторы на (анти)самодуальные подпространства

$$\Lambda_\pm \subset \Lambda\,, \qquad \Lambda_+ \oplus \Lambda_- = \Lambda$$

Задача 12.20. Найти размерности и сигнатуры пространств, допускающих условия самодуальности при $d = 2, 4, 6, 10$.

12.3 Безмассовые поля произвольного спина

Современная формулировка полей произвольного спина с нулевой массой покоя восходит к работе Фронсдала 1978 года. Как мы увидим, именно поля с нулевой массой покоя отвечают за фундаментальные симметрии физических теорий и поэтому представляют наибольший интерес.

Согласно Фронсдалу, безмассовое поле спина s описывается симметричным тензором ранга s $\phi_{a_1\dots a_s}$, подчиненным условию двойной бесследовости

$$\phi_{\dots a\dots b\dots}(x) = \phi_{\dots b\dots a\dots}(x)\,, \qquad \phi^{ab}{}_{abc_5\dots c_d} = 0\,. \tag{12.23}$$

2tr

Последнее становится нетривиальным, начиная со случая $s = 4$.

Уравнения движения для поля Фронсдала имеют вид

$$\Box\phi_{a_1\dots a_s} \quad +\alpha(s)\partial_{a_1}\partial^b\phi_{ba_2\dots a_s} + \beta(s)\partial_{a_1}\partial_{a_2}\phi^b{}_{ba_3\dots a_s} \\ +\gamma(s)\eta_{a_1a_2}\partial^b\partial^c\phi_{bca_3\dots a_s} + \rho(s)\eta_{a_1a_2}\Box\eta^{bc}\phi_{bca_3\dots a_s} = 0 \tag{12.24}$$

с некоторыми коэффициентами $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ и $\rho(s)$, (по индексам a_i предполагается полная симметризация). Замечу, что левая часть уравнений содержит все члены с двумя производными, которые только можно написать с учетом условия двойной бесследовости (12.23).

Задача 12.21. Убедиться.

Конкретный выбор коэффициентов определяется принципом калибровочной симметрии, который требует, что, если некоторое $\phi_{a_1\dots a_s}(x)$ решает уравнения Фронсдала, то

$$\phi'_{a_1\dots a_s}(x) = \phi_{a_1\dots a_s}(x) + \partial_{(a_1}\varepsilon_{a_2\dots a_s}(x) \tag{12.25}$$

gau

также является их решением для произвольного симметричного тензора ранга $s-1$ $\varepsilon_{a_1\dots a_{s-1}}(x)$, удовлетворяющего условию бесследовости

$$\varepsilon^b{}_{ba_3\dots a_{s-1}}(x) = 0\,. \tag{12.26}$$

Важное замечание состоит в том, что если $\phi_{a_1\dots a_s}(x)$ удовлетворяло условию (12.23), то и $\phi'_{a_1\dots a_s}(x)$ ему удовлетворяет.

Задача 12.22. Доказать

Задача 12.23. * Найти коэффициенты $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ и $\rho(s)$, при которых преобразование (12.25) переводит решение в решение. Объяснить почему решение на коэффициенты не единственно.
(* отмечает менее простые задачи.)

Принцип *калибровочной инвариантности* состоит в том, что решения ϕ и ϕ' физически эквивалентны (неотличимы). Это фундаментальный принцип, который, как мы увидим, определяет структуру, в частности, таких физических теорий, как электродинамика ($s = 1$) и теория гравитации ($s = 2$). Симметрии, ассоциированные с полями спинов $s > 2$, называются *симметриями высших спинов* и играют ключевую роль в теории фундаментальных взаимодействий при сверхвысоких энергиях.

С формальной точки зрения, речь в который уже раз идет об отношении эквивалентности. Решения линейных уравнений образуют линейное пространство - назовем его V. Принцип калибровочной инвариантности означает, что любая функция вида

$$\phi'_{a_1\dots a_s}(x) = \partial_{(a_1}\varepsilon_{a_2\dots a_s)}(x) \tag{12.27}$$

также порождает решение. Решения такого вида образуют линейное пространство.

Задача 12.24. Проверить.

Назовем его V'. Очевидно $V' \subset V$. Калибровочный принцип требует эквивалентности решений, отличающихся на элементы из V'. Математически это означает, что физически различные решения принадлежат фактор пространству V/V'.

Задача 12.25. * Найти действие Фронсдала как калибровочно инвариантное действие, из условия экстремальности которого следуют уравнения Фронсдала (12.24).

12.4 Теорема о двух столбцах

Пусть тензор $T_{a_1\dots a_n,b_1\dots b_m}$ полностью антисимметричен по индексам каждого из наборов $a_1\dots a_n$ и $b_1\dots b_m$, принимающих d значений, а также подчинен условию, что все его следы равны нулю, что эквивалентно условию

$$T^c{}_{a_2\dots a_n,cb_2\dots b_m} = 0\,. \tag{12.28}$$

На языке диаграмм Юнга, который будет еще обсуждаться, каждый из полностью антисимметризованных наборов индексов обозначается столбцом.

Задача 12.26. *Доказать, что $T_{a_1\dots a_n,b_1\dots b_m} = 0$, если $n+m>d$.

12.5 Что читать?

Чтобы двигаться дальше, на первом этапе предлагаю сконцентрироваться на теор. физике.
1. Ландау, Лифшиц: Механика - с упором на главы 1-3, 5, 7, хотя и остальные главы полезны.
2. Ландау, Лифшиц: Теория Поля с упором на главы 1-4, 10, 11.
3. Дирак: Принципы квантовой механики - первые главы.

Математику вам будут давать на приличном уровне, но если будет время надо сфокусироваться на теории представлений. Может быть полезной книга Исаева и Рубакова.