

Вопросы ко второй контрольной 23-го мая

1. Закон композиции в группе Пуанкаре.

$$(\Lambda_1, a_1) \circ (\Lambda_2, a_2) = ?$$

Здесь $\Lambda_{1,2}$ - матрицы псевдоортогональной группы, $a_{1,2}$ - вектора трансляций. Размерность группы Пуанкаре. Нормальный делитель.

2. Вывод преобразований Лоренца из определения действия ортогональной группы в пространстве Минковского. Чему равна скорость движущейся системы отсчета при бусте

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} ?$$

3. Покажите, что матрицы удовлетворяющие условиям:

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma},$$

$\det |\Lambda| = +1$, $\Lambda^0_0 \geq 1$ образуют группу.

4. Покажите, что закон преобразования

$$\phi'(x) = \phi(g^{-1}(x)), \quad g(x) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

задает действие группы Пуанкаре на скалярном поле, т.е. линейное пространство Φ скалярных полей образует Пуанкаре-модуль.

5. Покажите, что

1. уравнение КГФ инвариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре
2. пространства решений уравнений КГФ с разными массами не пересекаются.

6. Опишите орбиты группы Лоренца в пространстве Минковского.

7. Покажите, что выражение $\exp(ip_\mu x^\mu)$ при подходящем выборе p_a решает уравнение КГФ. Какому условию подчиняется p_μ ? Покажите, что p_a преобразуется как 4-вектор при преобразованиях Лоренца.

8. Покажите, что решения уравнения КГФ, которые могут быть явно представлены в виде

$$\phi(x) = \int d^3 p \left(\phi_+(\vec{p}) e^{ip_\alpha x^\alpha} + \phi_-(\vec{p}) e^{-ip_\alpha x^\alpha} \right), \quad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

образуют неприводимый Пуанкаре-модуль. Покажите, что положительно и отрицательно частотные моды образуют неприводимые модули относительно ортохронной группы Лоренца $SO_\uparrow(3, 1)$.

9. Найти явный вид генераторов $(P_\mu, L_{\mu\nu})$ алгебры Ли группы Пуанкаре, действующих на скалярном поле. Коммутационные соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре и идеал.

10. Определение универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли. Предложите базис в универсальной обертывающей алгебре.

11. Понятие центра алгебры. Покажите, что квадратичный оператор Казимира $C_2 = \eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu$ принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры Ли группы Пуанкаре.

12. Доказать Лемму Шура. Понятие эквивалентных представлений. Показать, что значения операторов Казимира на эквивалентных представлениях совпадают. Критерий неэквивалентности представлений.

13*. Вектор Паули-Любанского W^μ . Коммутационные соотношения вектора Паули-Любанского с генераторами преобразований Лоренца и трансляций.

14. Используя, что при лоренцевых преобразованиях вектор Паули-Любанского W^μ действительно преобразуется как вектор, показать, что четвертичный оператор Казимира $C_4 = W^\mu W_\mu$ принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры Ли группы Пуанкаре. Вычислить значение четвертичного оператора Казимира на скалярном поле.