

# 1 Вопросы к контрольной 16-го апреля

1. Показать, что действие группы  $G$  на множестве  $M$  задает отношение эквивалентности

$$g(m) \sim m \quad \forall g \in G.$$

Понятие орбиты. Орбиты ортогональной группы в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

2. Показать, что левое, правое и присоединенное действия группы на себе согласовано с законом композиции в группе.

3. Понятие простой и непростой группы. Нормальная подгруппа. Фактор-группа. Смежные классы.

4. Является ли группа обратимых матриц  $GL(n)$  простой? Если нет, то каковы ее нормальные подгруппы и фактор-группы?

5. Понятия левых, правых и двусторонних идеалов ассоциативной алгебры. Фактор-алгебра. Идеалы алгебры матриц и полиномов

7. Показать, что размерность сферы  $S^n$  действительно  $n$ , вычислив ранг соответствующей системы условий.

8. Группа Галилея. Найти размерность. Является ли группа преобразований Галилея простой? Если нет, то найти нормальную подгруппу и фактор-группу.

9. Покажите, что матрицы  $A^i_j$  линейных преобразований  $x^i \rightarrow x'^i = A^i_j x^j$ , сохраняющие длину между точками, удовлетворяют условию

$$A^i_j A^m_n \delta_{im} = \delta_{jn}.$$

Покажите, что матрицы, подчиняющиеся этому условию образуют группу. Найдите размерность этой группы.

10. Покажите, что матрицы удовлетворяющие условию

$$A^i_j A^m_n \delta_{im} = \delta_{jn}.$$

так же удовлетворяют условию

$$A^i_j A^m_n \delta^{jn} = \delta_{im}.$$

11. Однородное пространство. Показать, что подгруппы стабильности различных точек изоморфны. Определить  $S^n$  и  $\mathbb{R}^n$  как однородные пространства.

12. Определить понятие транспонирование по отношению к произвольной билинейной форме. Покажите, что для операции транспонирования справедливо свойство

$$(AB)' = B'A',$$

т.е. транспонирование является антиавтоморфизмом.

13. Коммутант группы и его связь с алгеброй Ли. Определение алгебры Ли.

14. Алгебра ли  $\mathfrak{gl}(n)$ . Размерность и структурные соотношения.

15. Алгебра ли  $\mathfrak{sl}(n)$ . Размерность и структурные соотношения.

16. Алгебра ли  $\mathfrak{so}(n)$ . Размерность и структурные соотношения.

17. Модули групп и алгебр Ли. Понятие приводимого модуля. Прямая сумма и неразложимые модули.

18. Понятие фактор-модуля и точная короткая последовательность.

19. Групповая алгебра.

20. Симметрии уравнений Ньютона. Дополнительные симметрии уравнений электростатического (гравитационного) взаимодействия и уравнений упругих сил.
21. Вывод закона преобразований координат при вращениях плоскости из определения ортогональной группы.
22. Установить связь движений евклидова пространства, описывающих вращения относительно разных неподвижных точек (центров вращения).
23. Понятие двойственного к  $V$  пространства  $V^*$ . Базис  $V^*$ . Найти  $V^{**}$  для конечномерного  $V$ .
24. Определение псевдоортогональной группы  $O(p, q)$ .
25. Доказать неприводимость векторного  $O(n)$ -модуля  $\mathbb{R}^n$ .
26. Символ Леви-Чивита и детерминант.
27. Детерминант матрицы бесконечно близкой к единичной.