

1 Вопросы к контрольной 24-го апреля

1. Показать, что действие группы G на множестве M задает отношение эквивалентности

$$g(m) \sim m \quad \forall g \in G.$$

Понятие орбиты. Орбиты ортогональной группы в $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Показать, что левое, правое и присоединенное действия группы на себе согласовано с законом композиции в группе.

3. Понятие простой и непростой группы. Нормальная подгруппа. Фактор-группа. Смежные классы.

4. Является ли группа обратимых матриц $GL(n)$ простой? Если нет, то каковы ее нормальные подгруппы и фактор-группы?

5. Понятия левых, правых и двусторонних идеалов ассоциативной алгебры. Фактор-алгебра. Идеалы алгебры матриц и полиномов

7. Показать, что размерность сферы S^n действительно n , вычислив ранг соответствующей системы условий.

8. Группа Галилея. Найти размерность. Является ли группа преобразований Галилея простой? Если нет, то найти нормальную подгруппу и фактор-группу.

9. Покажите, что матрицы A^i_j линейных преобразований $x^i \rightarrow x'^i = A^i_j x^j$, сохраняющие длину между точками, удовлетворяют условию

$$A^i_j A^m_n \delta_{im} = \delta_{jn}.$$

Покажите, что матрицы, подчиняющиеся этому условию образуют группу. Найдите размерность этой группы.

10. Покажите, что матрицы удовлетворяющие условию

$$A^i_j A^m_n \delta_{im} = \delta_{jn}.$$

так же удовлетворяют условию

$$A^i_j A^m_n \delta^{jn} = \delta_{im}.$$

11. Однородное пространство. Показать, что подгруппы стабильности различных точек изоморфны. Определить S^n и $\mathbb{R}^n$ как однородные пространства.

12. Определить понятие транспонирования по отношению к произвольной билинейной форме. Покажите, что для операции транспонирования справедливо свойство

$$(AB)' = B'A',$$

т.е. транспонирование является антиавтоморфизмом.

13. Коммутант группы и его связь с алгеброй Ли. Определение алгебры Ли.

14. Алгебра ли $\mathfrak{gl}(n)$. Размерность и структурные соотношения.

15. Алгебра ли $\mathfrak{sl}(n)$. Размерность и структурные соотношения.

16. Алгебра ли $\mathfrak{so}(n)$. Размерность и структурные соотношения.

17. Модули групп и алгебр Ли. Понятие приводимого модуля. Прямая сумма и неразложимые модули.

18. Понятие фактор-модуля и точная короткая последовательность.

19. Групповая алгебра.

- 20. Симметрии уравнений Ньютона. Дополнительные симметрии уравнений электростатического (гравитационного) взаимодействия и уравнений упругих сил.
- 21. Вывод закона преобразований координат при вращениях плоскости из определения ортогональной группы.
- 22. Установить связь движений евклидова пространства, описывающих вращения относительно разных неподвижных точек (центров вращения).
- 23. Понятие фактор-модуля и точная короткая последовательность.
- 24. Понятие двойственного к V пространства V^* . Базис V^* . Найти V^{**} для конечномерного V .
- 25. Определение псевдоортогональной группы $O(p, q)$.
- 26. Доказать неприводимость векторного $O(n)$ -модуля $\mathbb{R}^n$.
- 27. Символ Леви-Чивита и детерминант.
- 28. Детерминант матрицы бесконечно близкой к единичной.