

Вопросы к зачету 23-го октября 2025

1. Определение $\mathbb{Z}_2$ – и $\mathbb{Z}$ – градуированных алгебр и модулей. Модули младшего (старшего) веса.
2. Определение алгебры Клиффорда. Найти размерность алгебры Клиффорда, предъявив базис.
- 3*. Сформулировать универсальное свойство тензорной алгебры и алгебры Клиффорда. Показать, что если некоторая ассоциативная алгебра $\mathcal{C}$ удовлетворяет такому же универсальному свойству, что и алгебра Клиффорда, то они изоморфны.
4. Показать, что максимальный элемент алгебры Клиффорда

$$\Gamma := i^{\frac{d(d-1)}{2}} \sqrt{\det |\eta|} \phi_0 \phi_1 \dots \phi_{d-1}.$$

удовлетворяет соотношению

$$\Gamma \phi_n = (-1)^{d-1} \phi_n \Gamma.$$

5. Показать, что максимальный элемент алгебры Клиффорда

$$\Gamma := i^{\frac{d(d-1)}{2}} \sqrt{\det |\eta|} \phi_0 \phi_1 \dots \phi_{d-1}.$$

удовлетворяет соотношению

$$\Gamma^2 = 1.$$

6. Предъявить замену переменных для комплексной алгебры Клиффорда (в четном числе измерений) с определяющими соотношениями $\{\phi_m, \phi_n\} = 2\eta_{mn}$, при которой определяющие соотношения могут быть представлены в виде

$$\{\psi_a^-, \psi^{+b}\} = \delta_a^b, \quad \{\psi_a^-, \psi_b^-\} = 0, \quad \{\psi^{+a}, \psi^{+b}\} = 0.$$

7. Найти явную реализацию вещественных алгебр Клиффорда $\mathbb{Cl}_1$, $\mathbb{Cl}_2$ для метрик с полностью отрицательной сигнатурой.
8. Дать определение комплексификации вещественной ассоциативной алгебры. Связь комплексной и вещественной алгебр Клиффорда (без доказательства).
9. Найти явную реализацию комплексной алгебры Клиффорда $\mathbb{Cl}_1$. Доказать изоморфизм алгебр

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

10. Показать, что комплексная алгебра Клиффорда в двух измерениях $\mathbb{Cl}_2$ изоморфна алгебре комплексных матриц 2×2

$$\mathbb{Cl}_2 \cong \text{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

11. Для комплексной алгебры Клиффорда $\mathbb{Cl}_{n+2}$ доказать справедливость изоморфизма

$$\mathbb{Cl}_{n+2} \cong \mathbb{Cl}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{Cl}_2.$$

12. Показать, что тензорное произведение алгебр матриц размерности m и n является алгеброй матриц размерности mn , т.е.

$$Mat_{mn}(\mathbb{R}) \cong Mat_m(\mathbb{R}) \otimes Mat_n(\mathbb{R}), \quad Mat_{mn}(\mathbb{C}) \cong Mat_m(\mathbb{C}) \otimes Mat_n(\mathbb{C}).$$

Показать, что комплексные алгебры Клиффорда в четном и нечетном числе измерений соответственно изоморфны алгебре комплексных матриц или прямой сумме алгебр комплексных матриц, т.е.

$$\mathbb{C}\ell_{2n+1} \cong Mat_{2^n}(\mathbb{C}), \quad \mathbb{C}\ell_{2n} \cong Mat_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus Mat_{2^n}(\mathbb{C}).$$

13. Определение прямой суммы и тензорного произведения ассоциативных алгебр. Показать, что комплексная алгебра Клиффорда в нечетном числе измерений может быть представлена как прямая сумма алгебр, т.е.

$$\mathbb{C}\ell_{2n+1} \cong \mathbb{C}\ell_{2n+1}^+ \oplus \mathbb{C}\ell_{2n+1}^-, \quad \mathbb{C}\ell_{2n+1}^\pm := \frac{1 \pm \Gamma}{2} \mathbb{C}\ell_{2n+1}.$$

14. Предложить способ ввести $\mathbb{Z}_2$ – и $\mathbb{Z}$ – градуировку в комплексной алгебре Клиффорда в четном числе измерений.

15. Показать, что элементы алгебры Клиффорда

$$L_{mn} = \frac{1}{4} [\phi_m, \phi_n]$$

удовлетворяют коммутационным соотношения алгебры Ли группы Лоренца.

16. Предложить способ ввести $\mathbb{Z}$ – градуировку в алгебре матриц.

17. Дать определение (анти)автоморфизма. Привести примеры на алгебре матриц.

18. Понятие транспонированной алгебры. Показать, что алгебра Клиффорда изоморфна своей транспонированной.

19. Как строится модуль Фока комплексной алгебры Клиффорда в четном числе измерений? Какова размерность этого модуля?

20. Разложить спинорное представление алгебры Клиффорда (модуль Фока) на неприводимые представления (подмодули) алгебры Ли группы Лоренца. Понятие левых и правых спиноров и их размерность.

21. Уравнение Дирака. Закон преобразования спинорного поля при преобразованиях из группы Пуанкаре. Показать Лоренц-инвариантность уравнения Дирака.

22. Покажите, что спинорное поле, которое удовлетворяет уравнению Дирака, также удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона-Фока.

23. Преобразование спинора при поворотах. Подробно рассмотреть случай поворота на 2π .

24. Связь алгебры Клиффорда с ортогональными преобразованиями: реализовать отображение в алгебре Клиффорда, сформулировать теорему Картана.