Вопросы к зачету

1. Объяснить физический смысл условия сохранения

$$\partial_{\underline{n}} J^{\underline{n}}(x) = 0.$$

2. Убедиться, что из уравнений Максвелла в пустоте вытекает, что

$$\Box F_{\underline{nm}} = 0.$$

3. Показать, что уравнение Дирака в присутствии электромагнитного поля

$$\left(i\gamma^{\underline{n}}{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}} D_{\underline{n}} + m\delta_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\right)\psi_{\hat{\beta}}(x) = 0, \quad D_{\underline{n}} := \partial_{\underline{n}} - ieA_{\underline{n}}(x)$$

инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$A'_{\underline{n}}(x) = A_{\underline{n}}(x) + \frac{1}{e}\partial_{\underline{n}}\varphi(x), \quad \psi'_{\hat{\beta}}(x) = e^{i\varphi(x)}\psi_{\hat{\beta}}(x).$$

Какую группу образуют такие преобразования?
4. Показать, что условие Лоренца $\partial_{\underline{n}} A^{\underline{n}}(x) = 0$ на электромагнитное поле полностью не фиксирует калибровочный произвол. Найти остаточный произвол.
5. Показать, что для ковариантного дифференциала теории Янга-Миллса, определенного как

$$D\Phi^A(x) = \mathrm{d}\Phi(x) + A^A{}_B(x)\Phi^B(x)\,,$$

справедливо соотношение для инфинитеземального калибровочного преобразования

$$\delta\left(D\left(\Phi^A\right)\right) = D\left(\delta\Phi^A\right).$$

6. Убедится, что

$$DD = F$$

или, что эквивалентно,

$$DD\Phi^A(x) = F^A{}_B(x)\Phi^B(x).$$

7. Используя определение тензора напряженности $DD = F$ в теории Янга-Миллса, показать, что он удовлетворяет тождеству Бьянки

$$DF := \mathrm{d}F + [A, F] = 0.$$

8. Доказать, что любое решение уравнений самодуальности

$$F = \pm F^*$$

решает и уравнения Янга-Миллса в отсутствии материи.
9. Проверить, что связность, определеная формулой

$$A(x) = g^{-1}(x)\mathrm{d}(g(x))\,,$$

где $g(x)$ – произвольный элемент со значениями в калибровочной группе Янга-Миллса, является плоской.
10. Используя, что компоненты два-формы $R^a = \theta^{\underline{n}}\theta^{\underline{m}}R^a_{\underline{nm}}$ антисимметричны по подчеркнутым индексам: $R^a_{\underline{nm}} = -R^a_{\underline{mn}}$, убедиться, что число уравнений нулевого кручения

$$R^a = 0$$

совпадает с числом компонент один-формы лоренцевой связности ω^{ab}.