

Вопросы к контрольной

1. Понятие дифференцирования алгебры. Внутренние и внешние дифференцирования. Показать, что внутренние дифференцирования образуют идеал алгебры дифференцирований.

2. Определение \mathbb{Z}_2 - и \mathbb{Z} - градуированных алгебр и \mathbb{Z} - градуированных модулей. Модули младшего веса.

3. Определение супердифференцирования. Как определяется четность супердифференцирования?

4. Определение алгебры Клиффорда. Найти размерность алгебры Клиффорда, предъявив базис.

5. Показать, что максимальный элемент алгебры Клиффорда

$$\Gamma = i^{\frac{d(d-1)}{2}} \sqrt{\det |\eta|} \phi_0 \phi_1 \dots \phi_{d-1}$$

удовлетворяет следующему соотношению

$$\Gamma \phi_n = (-1)^{d-1} \phi_n \Gamma.$$

6. Показать, что максимальный элемент алгебры Клиффорда

$$\Gamma = i^{\frac{d(d-1)}{2}} \sqrt{\det |\eta|} \phi_0 \phi_1 \dots \phi_{d-1}$$

удовлетворяет следующему соотношению

$$\Gamma \Gamma = I,$$

где I -единичный элемент алгебры Клиффорда

7. Предъявить замену переменных для алгебры Клиффорда (в четном числе измерений), при которой определяющие соотношения могут быть представлены в виде

$$\{\psi^{+a}, \psi^{-b}\} = \delta_b^a, \quad \{\psi^{+a}, \psi^{+b}\} = 0, \quad \{\psi^{-a}, \psi^{-b}\} = 0.$$

8. Показать, что алгебра Клиффорда в нечетном числе измерений может быть представлена как прямая сумма алгебр, т.е.

$$Cl_{2k+1} = Cl_{2k+1}^+ \oplus Cl_{2k+1}^-.$$

9. Как вводится \mathbb{Z}_2 -градуировка \mathbb{Z} -градуировка в алгебре Клиффорда в четном числе измерений?

10. Показать, что элементы алгебры Клиффорда

$$L_{mn} = -\frac{i}{4} [\phi_m, \phi_n]$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры псевдоортогональной группы.

11. Как вводится \mathbb{Z} -градуировка в алгебре полиномов и алгебре матриц?

12. Дайте определение (анти)автоморфизма алгебры. Приведите примеры на алгебре матриц.

- 13.** Понятие транспонированной алгебры. Показать, что алгебра Клиффорда изоморфна своей транспонированной.
- 14.** Как строится модуль Фока алгебры Клиффорда? Какова размерность этого модуля?
- 15.** Разложить спинорное представление алгебры Клиффорда (модуль Фока) на неприводимые представления (подмодули) алгебры Ли группы Лоренца. Левые и правые спиноры и их размерность.
- 16.** Уравнение Дирака. Закон преобразования спинорного поля при преобразованиях из группы Пуанкаре. Докажите Лоренц-инвариантность уравнения Дирака.
- 17.** Покажите, что спинорное поле, которое удовлетворяет уравнению Дирака, так же удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона-Фока.