



образовательная программа

**Теория фундаментальных взаимодействий и
квантовая гравитация**

ТЕОРИЯ ГРУПП

1. Основные структуры и понятия теории групп.

Группы, кольца, поля. Гомоморфизм и изоморфизм алгебраических структур. Ядро и образ. Отношение эквивалентности, фактор-множество, фактор-группа. Теорема о гомоморфизме. Действия групп. Орбиты и стабилизаторы. Однородное пространство группы.

2. Основные понятия линейной алгебры. Структуры на линейных пространствах. Тензоры и тензорные произведения.

Напоминание основных понятий: линейное пространство, базис и координаты, двойственное пространство, векторы и ковекторы, подпространство и фактор-пространство, прямая сумма линейных пространств. Структуры на линейных пространствах: билинейные формы, комплексные структуры, флаги, алгебры. Конечномерное гильбертово пространство. Тензоры и тензорные произведения. Различные определения тензора и их эквивалентность. Универсальность тензорного произведения и связь с пространствами линейных отображений.

3. Матричные группы Ли. Линейные представления групп. Алгебры Ли матричных групп.

Группы преобразований и абстрактные группы. Гомоморфизмы, изоморфизмы, ядра, подгруппы, нормальный делитель, факторгруппа Многообразия, локальные координаты, гладкие отображения, (ко)касательное пространство. Примеры матричных групп Ли: $GL(n)$, $SL(n)$, $SO(n)$, $Sp(2n)$, $U(n)$, $SU(n)$. Группы движений (псевдо)евклидова пространства. Группы Лоренца и Пуанкаре. Представления групп: (под)модуль, приводимость, фактор-модуль, присоединенное представление. Алгебры Ли матричных групп. Примеры. Дифференциал представления группы. Представления алгебр Ли. Присоединенное представление группы и алгебры. Форма Киллинга.

4. Теория представлений компактных и связанных с ними групп. Тензорные произведения представлений. Алгебры Клиффорда и спинорные представления.

Конечные группы и их представления. Усреднение по конечной группе. Инвариантные формы на группе. Компактные группы. Усреднение по компактной группе. Полная приводимость представлений компактных групп.

Комплексификация, овеществление, вещественная форма. Редуктивные группы. Групповая алгебра и функции на конечной группе. Характеры. Тензорные произведения представлений групп и алгебр. $sl(2)$ и ее конечномерные неприводимые представления. Теория представлений $sl(3)$: подалгебра Картана, веса, корни, векторы старшего веса. Тензорные произведения $sl(n)$, $so(n)$, $sp(2n)$. Диаграммы Юнга. Алгебры Клиффорда. Спинорные представления ортогональных алгебр.

5. Однородные пространства. Поля на однородных пространствах. Представления некомпактных групп на локальных полях.

Действия групп на многообразиях. Однородные пространства. Евклидово пространство, пространства Минковского и (анти-)де Ситтера. Параболические подгруппы и пространства флагов. Тензорные и спинорные поля на однородных пространствах. Алгебры Лоренца и Пуанкаре в d измерениях. Индуцированные представления алгебр и групп Ли. Неприводимые представления алгебр Лоренца и Пуанкаре.