Вопросы к контрольной 16-го мая

1. Закон композиции в группе Пуанкаре.

$$(A_1, a_1) \circ (A_2, a_2) = ?$$

Здесь $A_{1,2}$ - матрицы псевдоортогональной группы, $a_{1,2}$ - вектора трансляций. Размерность группы Пуанкаре. Нормальный делитель.
2. Вывод преобразований Лоренца из определения действия ортогональной группы в пространстве Минковского. Чему равна скорость движущейся системы отсчета при бусте

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} ?$$

3. Покажите, что матрицы удовлетворяющие условиям:

$$A^a{}_b A^c{}_d \eta_{ac} = \eta_{bd},$$

$\det|A| = +1$, $A^0{}_0 \geq 1$ образуют группу.
4. Покажите, что закон преобразования

$$\phi'(x) = \phi(g^{-1}(x)), \quad g(x) = A^a{}_b x^b + a^a$$

задает действие группы Пуанкаре на скалярном поле, т.е. линейное пространство Φ скалярных полей образует Пуанкаре-модуль.
5. Покажите, что

1. уравнение КГФ инвариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре
2. пространства решений уравнений КГФ с разными массами не пересекаются.

6. Опишите орбиты группы Лоренца в пространстве Минковского.
7. Покажите, что выражение $\exp(ip_a x^a)$ при подходящем выборе p_a решает уравнение КГФ. Какому условию подчиняется p_a? Покажите, что p_a преобразуется как 4-вектор при преобразованиях Лоренца.
8. Покажите, что решения уравнения КГФ, которые могут быть явно представлены в виде

$$\phi(x) = \int d^3p \Big(\phi_+(\vec{p}) e^{ip_\alpha x^\alpha} + \phi_-(\vec{p}) e^{-ip_\alpha x^\alpha}\Big), \quad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

образуют неприводимый Пуанкаре-модуль. Покажите, что положительно и отрицательно частотные моды образуют неприводимые модули относительно ортохронной группы Лоренца $SO_\uparrow(3,1)$.
9. Найти явный вид генераторов $(P_a,\ L_{ab})$ алгебры Ли группы Пуанкаре, действующих на скалярном поле. Коммутационные соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре и идеал.
10. Определение универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли. Предложите базис в универсальной обертывающей алгебре.
11. Понятие центра алгебры. Покажите, что квадратичный оператор Казимира $C_2 = \eta_{ab} P^a P^b$ принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры Ли группы Пуанкаре.
12. Доказать Лемму Шура. Понятие эквивалентых представлений. Показать, что значения операторов Казимира на эквивалентных представлениях совпадают. Критерий неэквивалентности представлений.

13. Вектор Паули-Любанского W^a. Коммутационные соотношения вектора Паули-Любанского с генераторами преобразований Лоренца и трансляций.
14. Используя, что при лоренцевых преобразованиях вектор Паули-Любанского W^a действительно преобразуется как вектор, показать, что четвертичный оператор Казимира $C_4 = W^a W_a$ принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры Ли группы Пуанкаре. Вычислить значение четвертичного оператора Казимира на скалярном поле.