

# 1 Вопросы к контрольной 19-го мая

1. Закон композиции в группе Пуанкаре.

$$(A_1, a_1) \circ (A_2, a_2) = (A, a)$$

Здесь  $A_{1,2}, A$  - матрицы псевдоортогональной группы,  $a_{1,2}, A$  - вектора трансляций. Найти выражение для  $A$  и  $a$  через  $A_{1,2}, a_{1,2}$ . Размерность группы Пуанкаре. Нормальный делитель.

2. Вывод преобразований Лоренца из определения действия ортогональной группы в пространстве Минковского. Чему равна скорость движущейся системы отсчета при бусте

$$A = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} ?$$

3. Покажите, что матрицы удовлетворяющие условиям:

$$A^a{}_b A^c{}_d \eta_{ac} = \eta_{bd},$$

$\det |A| = +1, A^0_0 \geq 1$  образуют группу.

4. Покажите, что закон преобразования

$$\phi'(x) = \phi(g^{-1}(x)), \quad g(x) = A^a{}_b x^b + a^a$$

задает действие группы Пуанкаре на скалярном поле, т.е. линейное пространство  $\Phi$  скалярных полей образует Пуанкаре-модуль.

5. Покажите, что

1. уравнение КГФ инвариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре
2. пространства решений уравнений КГФ с разными массами не пересекаются.

6. Опишите орбиты группы Лоренца в пространстве Минковского.

7. Покажите, что выражение  $\exp(ip_a x^a)$  при подходящем выборе  $p_a$  решает уравнение КГФ. Какому условию подчиняется  $p_a$ ? Покажите, что  $p_a$  преобразуется как 4-вектор при преобразованиях Лоренца.

8. Покажите, что решения уравнения КГФ, которые могут быть явно представлены в виде

$$\phi(x) = \int d^3 p \left( \phi_+(\vec{p}) e^{ip_\alpha x^\alpha} + \phi_-(\vec{p}) e^{-ip_\alpha x^\alpha} \right), \quad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

образуют неприводимый Пуанкаре-модуль. Покажите, что положительно и отрицательно частотные моды образуют неприводимые модули относительно ортохронной группы Лоренца  $SO_\uparrow(3, 1)$ .

9. Найти явный вид генераторов  $(P_a, L_{ab})$  алгебры Ли группы Пуанкаре, действующих на скалярном поле. Коммутационные соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре и идеал.

10. Определение универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли. Опишите базис в универсальной обертывающей алгебре.

11. Понятие центра алгебры. Покажите, что квадратичный оператор Казимира  $C_2 = \eta_{ab} P^a P^b$  принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры Ли группы Пуанкаре.

- 12.** Доказать Лемму Шура. Понятие эквивалентных представлений. Показать, что значения операторов Казимира на эквивалентных представлениях совпадают. Критерий неэквивалентности представлений.
- 13.** Вектор Паули-Любанского  $W^a$ . Коммутационные соотношения вектора Паули-Любанского с генераторами преобразований Лоренца и трансляций.
- 14.** Используя, что при лоренцевых преобразованиях вектор Паули-Любанского  $W^a$  действительно преобразуется как вектор, показать, что четвертичный оператор Казимира  $C_4 = W^a W_a$  принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры Ли группы Пуанкаре. Вычислить значение четвертичного оператора Казимира на скалярном поле.
- 15.** Малая группа Вигнера. Малая группа для массивного и безмассового случаев.