

Вопросы к зачету

1. Действие G на себе может быть задано тремя неэквивалентными способами:

Левое действие $g(f) := g \circ f$

Правое действие $g(f) := f \circ g^{-1}$.

Присоединенное действие $g(f) := g \circ f \circ g^{-1}$.

Убедитесь, что все три операции задают действие группы на себе, согласованное с законом композиции в группе в том смысле, что

$$g_1(g_2(f)) = (g_1 \circ g_2)(f).$$

Определение нормального делителя.

2. Линейные пространства: Фактор-пространство, прямая сумма, линейная оболочка, тензорное произведение, тензорная алгебра.
3. Группа Галилея
4. Группа движений евклидова пространства, ортогональная группа $O(n)$, группа вращений $SO(n)$ и их размерности.
5. Представления, модули, неприводимые представления, прямая сумма модулей, неразложимые модули
6. Связь групп Ли и алгебр Ли. Определение алгебр Ли.
7. Структурные соотношения алгебры $gl(n)$. Базис в пространстве матриц $(e^a_b)^i_j$ удобно представить в виде

$$(e^a_b)^i_j = \delta^a_j \delta^i_b.$$

Убедитесь, что в этом базисе

$$e^a_b e^c_d = \delta^a_d e^c_b$$

и, следовательно,

$$[e^a_b, e^c_d] = \delta^a_d e^c_b - \delta^c_b e^a_d.$$

8. Детерминант через символ Леви-Чивиты. Покажите, что определение

$$\det |A| = \frac{1}{n!} \epsilon_{a_1 \dots a_n} \epsilon^{b_1 \dots b_n} A^{a_1}_{b_1} \dots A^{a_n}_{b_n},$$

совпадает с тем, что дается в курсе линейной алгебры. Покажите, что абсолютно антисимметричный тензор $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ является инвариантом группы $SL(n)$.

9. Детерминант матрицы близкой к единичной.
10. Операция следа и ее свойства.

11. Алгебры Ли $sl(n)$ и $o(n)$. Определяющие соотношения алгебры $o(n)$.
12. Структурные соотношения алгебры $o(p, q)$.
13. Вывести преобразования Лоренца из определения $O(3, 1)$. Покажите, что они совпадают с

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

14. Определение ортохронной группы Лоренца. Покажите, что псевдоортогональные матрицы с $A^0_0 \geq 1$ образуют группу.
15. Закон преобразования скалярного поля при заменах координат. Проверить, что скалярные поля образуют Пуанкаре-модуль.
16. Показать релятивистскую инвариантность уравнения КГФ.
17. Показать, что пространства решение уравнения КГФ с разными массами не пересекаются.
18. Волновое уравнение в двух измерениях и его решения. Плоские волны, спектральное соотношение. Закон преобразования 4-импульса плоской волны.
19. Структурные соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре.
20. Лемма Шура.
21. Эквивалентные модули. Операторы Казимира и критерий неэквивалентности модулей.
22. Операторы Казимира группы Пуанкаре.