

Симметрии в физике

2018 г. весенний семестр

Лектор: д.ф.-м.н. Васильев М. А.

Задачи

1. Получить закон Ньютона из действия свободной нерелятивистской частицы, исследовав его на минимальность

$$S = \int \frac{m\vec{v}^2}{2} dt. \quad (1)$$

Какими симметриями обладает выражение (1)?

2. По определению ортогональные матрицы A удовлетворяют условию

$$A^i_m A^j_n \delta_{ij} = \delta_{mn}. \quad (2)$$

Показать, что при выполнении условия (2), так же выполнено условие:

$$A^i_m A^j_n \delta^{mn} = \delta^{ij}. \quad (3)$$

3. Найти представление группы движений Евклидова пространства $IO(d)$ матрицами $(d+1 \times d+1)$. Проверить выполнение групповых свойств.

4. Найти явный вид преобразований Лоренца используя определение псевдоортогональной группы $O(1,1)$

$$\Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho \eta_{\mu\nu} = \eta_{\lambda\rho}, \quad \text{где} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Чему равна скорость подвижной системы отсчета в терминах компонент матрицы Λ^μ_λ ?

5. Показать, что преобразование инверсии

$$I : x^i \longrightarrow \frac{x^i}{x^2} \quad (5)$$

является конформным преобразованием, т.е. сохраняет углы.

6. Найти орбиты группы Пуанкаре $ISO(d-1,1)$.

7. Используя конструкцию проективного конуса Дирака получить явный вид конформных преобразований Евклидовой плоскости.

8. Получить в пределе малых скоростей действие нерелятивистской частицы (1) из действия релятивистской

$$S = -mc \int ds, \quad \text{где} \quad ds = d\tau \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\nu}}, \quad (6)$$

x^μ – координаты частицы в пространстве-времени. Показать, что действие (6) не зависит от выбора параметризации τ .