Лекция 13.
2 курс. Вес енний семестр, 16 марта 2020.

13.1 Поля Янга-Миллса как дифференциальные формы

13.1.1 Абелев случай - электродинамика

Электромагнитное поле описывается вектор-потенциалом $A_{\underline{n}}$ и напряженностью электромагнитного поля

$$F_{\underline{nm}} = \partial_{\underline{n}} A_{\underline{m}} - \partial_{\underline{m}} A_{\underline{n}} \,.$$

$o(3)$ - ковариантные компоненты $F_{\underline{nm}}$ отождествляются с электрическим и магнитным полями, соответственно.

Задача 13.1. Как?

В классической физике электромагнитное взаимодействие описывается только электромагнитной напряженностью. В квантовой - в основные уравнения входит вектор-потенциал. В обоих случаях уважается калибровочная инвариантность

$$\delta A_{\underline{n}}(x) = \partial_{\underline{n}} \varphi(x) \,.$$

Интерпретация в терминах дифференциальных форм очевидна. Вектор-потенциал является один-формой

$$A = dx^{\underline{n}} A_{\underline{n}} \,.$$

Напряженность поля является его дифференциалом

$$F := \mathrm{d}A \,, \tag{13.1}$$

а калибровочная инвариантность имеет вид

$$\delta A = \mathrm{d}\varphi \,.$$

Очевидно, $\delta F = 0$.

В силу своего определения, напряженность удовлетворяет тождеству Бианки

$$\mathrm{d}F = 0 \,.$$

Задача 13.2. Убедиться

Эти уравнения называются первой парой уравнений Максвелла (парой, поскольку они содержат два уравнения в трехмерной форме описания).

Вторая пара уравнений Максвелла имеет вид

$$\mathrm{d}F^* = J^* \,,$$

где * обозначает преобразование дуальности Ходжа

$$F^*_{\underline{nm}} := \frac{1}{2} \epsilon_{\underline{nm}}{}^{\underline{pr}} F_{\underline{pr}} \,,$$

а J^* - замкнутая три-форма тока

$$\mathrm{d}J^* = 0\,,$$

ходж-дуальная обычному току $J^{\underline{n}}(x)$, удовлетворяющему закону сохранения

$$\partial_{\underline{n}} J^{\underline{n}}(x) = 0\,.$$

Задача 13.3. В чем физический смысл уравнения сохранения?

Важное обстоятельство состоит в том, что индексы в преобразовании Ходжа опускаются метрическим тензором, который, тем самым, явно входит в уравнения Максвелла. Про это надо помнить, в частности, при преобразованиях координат.

Замечу, что J это те самые сохраняющиеся токи, которые мы построили из скалярных полей. Аналогично, сохраняющиеся токи могут быть построены из других свободных полей - например, поля Дирака, т.е. электрона.

Поскольку F - замкнутая форма - любая функция (полином) F (но не F^*) в рамках внешней алгебры,

$$\Phi(F(\theta, x))$$

является замкнутой формой. Поэтому интегралы по поверхностям Σ

$$\int_\Sigma \Phi(F(\theta, x))$$

не зависят от вариаций поверхности.

Мы используем удобную и математически мотивированную конвенцию, что интеграл от p-формы по q-мерной поверхности отличен от нуля только при $p = q$.

В случае замкнутых поверхностей Σ эти интегралы также не зависят от вариаций вектор-потенциала A.

Задача 13.4. Доказать.

Тем самым они характеризуют не столько поле, сколько поверхность, по которой интегрируются, задавая их топологические характеристики, называемые *классами Черна* (при обобщении на неабелев случай, который мы еще обсудим).

Наконец, пусть $F = 0$. Связность A, удовлетворяющая этому условию, называется *плоской*. Таким образом, плоская абелева связность по определению является замкнутой. Плоская связность называется *нетривиальной*, если она не сводится к чистой калибровке, т.е. не является точной. Таким образом, пространство нетривиальных плоских абелевых связностей совпадает с $H^1(M)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть имеется бесконечно тонкий и бесконечно длинный соленоид, по которому течет ток, создающий магнитное поле внутри соленоида. Вне соленоида в этом случае магнитное поле отсутствует. Но из уравнения (13.1) и теоремы Стокса следует, что $\int_{S_1} A = \int_{\Sigma^2} H \neq 0$, где Σ_2 - часть плоскости ортогональной соленоиду, окруженная окружностью S^1. Ненулевой вклад приносится как раз когомологией H^1 на плоскости с выколотой точкой, которая эквивалентна когомологии $H^1(S^1)$.

Эффект Ааронова-Бома состоит в том, что хотя все явления, происходящие вне экранированного соленоида, в классике его не чувствуют, в квантовой механике это не так, поскольку уравнение Шредингера содержит сам потенциал (хотя и не нарушает калибровочную инвариантность). Это явление дает пример физических проявлений когомологий.

13.1.2 Неабелевы поля

Как мы уже знаем, поля Янга-Миллса вводятся для того, чтобы добиться инвариантности теории с локальными (произвольно зависящими от координат) параметрами преобразований. В этой лекции я напомню основные элементы теории Янга-Миллса, переформулировав их на языке дифференциальных форм.

Поле Янга-Миллса это один-форма $A_{\underline{n}}{}^i$ со значениями в присоединенном представлении некоторой алгебры Ли g. Иными словами

$$A(x) = \theta^{\underline{n}} A_{\underline{n}}{}^i(x) e_i\,, \qquad [e_i\,, e_j] = f_{ij}^k e_k\,, \qquad i,j,k = 1,\dots \dim g\,,$$

где e_i - некоторый базис в g. Эквивалентно, можно считать, что поле Янга-Миллса принимает значения в том или ином представлении T алгебры g

$$A^A{}_B(x) = \theta^{\underline{n}} A_{\underline{n}}(x)^i T_i{}^A{}_B\,, \qquad [T_i\,, T_j] = f_{ij}^k T_k\,.$$

Пусть $\Phi^A(x)$ - поле со значениями в g-модуле V, где действует представление T. Ковариантная производная имеет вид

$$D\Phi^A(x) = \mathrm{d}\Phi^A(x) + A^A{}_B(x)\Phi^B(x)\,. \tag{13.2}$$

Она ковариантна относительно локальных (калибровочных) преобразований

$$\delta\Phi^A(x) = -\epsilon^i(x) T_i{}^A{}_B(x)\Phi^B(x) \tag{13.3}$$

с калибровочными параметрами $\epsilon^i(x)$, являющимися произвольными функциями координат, если поля Янга-Миллса $A(x)$ преобразуются по следующему закону

$$\delta A(x) = \mathrm{d}\epsilon(x) + [A(x)\,, \epsilon(x)]\,, \tag{13.4}$$

где калибровочный параметр $\epsilon(x)$ - ноль-форма со значениями в g, т.е. ϵ^i или $\epsilon^A{}_B := \epsilon^i T_i{}^A{}_B$. Ковариантность ковариантной производной выражается соотношением

$$\delta(D(\Phi^A)) = D(\delta\Phi^A)\,. \tag{13.5}$$

Задача 13.5. Проверить

Закон инфинитезимальных преобразований калибровочного поля (13.3) может быть записан в виде

$$\delta A(x) = D_{Ad}\epsilon(x) := \mathrm{d}\epsilon(x) + [A(x)\,, \epsilon(x)]\,, \tag{13.6}$$

где D_{Ad} обозначает ковариантную производную в присоединенном представлении g. Напомню, что *присоединенным представлением* назавается такое, в котором алгебра действует на себе по правилу

$$T_{Ad_f}(h) := [f, h] \quad \forall f, h \in g\,, \tag{13.7}$$

где $f \in g$ обозначает элемент, действующий на элемент $h \in g$.

Задача 13.6. Проверить, что $T_{Ad_f}(h)$, определенное таким образом, задает представление g.

Если имеется какая-либо теория с глобальной симметрией g, теория с локальной (калибровочной) симметрией g строится из нее путем введения полей Янга-Миллса, ассоциированных с g и замены обычных производных в лагранжиане, уравнениях и т.д. на ковариантные.

Задача 13.7. Продумать

Два-форму кривизны мы определим формулой

$$F_{\underline{nm}} := \frac{1}{2}\left(\partial_{\underline{n}} A_{\underline{m}} - \partial_{\underline{m}} A_{\underline{n}} + [A_{\underline{n}}\,, A_{\underline{m}}]\right)\,, \tag{13.8}$$

где скобки $[\,,]$ обозначают как обычно лиевское произведение. В терминах внешней алгебры это выражение эквивалентно следующему

$$F(x) = \mathrm{d}A(x) + A(x)A(x)\,, \tag{13.9}$$

где, используя, что произведение один-форм антисимметрично, введено обозначение

$$AA := \frac{1}{2}[A\,, A]$$

Задача 13.8. Убедиться, что антисимметрия внешнего произведения порождает коммутатор матриц ${A_{\underline{n}}}^A{}_B$.

Замечание: поскольку матрицы ${A_{\underline{n}}}^A{}_B$ с разными $\underline{n}$ независимы, их коммутатор не равен нулю.

Задача 13.9. Убедится, что

$$DD = F \tag{13.10}$$

или, что эквивалентно,

$$DD\Phi^A(x) = F^A{}_B(x)\Phi^B(x)\,.$$

Это согласуется с тем, что для $A = 0$, $D = \mathrm{d}$ и $\mathrm{d}^2 = 0$.

Закон преобразований A можно записать в виде

$$\delta A = D\varepsilon\,, \qquad D\varepsilon := \mathrm{d}\varepsilon + [A\,, \varepsilon]\,. \tag{13.11}$$

Задача 13.10. Убедится, что

$$\delta F = [F\,, \varepsilon]\,. \tag{13.12}$$

В дальнейшем мы будем опускать у ковариантной производной символ, указывающий на модуль, на котором она действует (например Ad для присоединенного представления). В силу своего определения напряженность удовлетворяет тождеству Бьянки

$$DF := \mathrm{d}F + [A\,, F] = 0\,.$$

Задача 13.11. Доказать, используя (13.10).

13.2 Инвариантные функционалы

Используя, что напряженность Янга-Миллса преобразуется однородно согласно (13.12), в ее терминах удобно строить инварианты следующего вида

$$L = tr(l(F, F^*))\,, \tag{13.13}$$

где все произведения считаются внешними по отношению к индексам форм и матричными по отношению к матричным индексам, которые несут F и F^*.

Например, лагранжиан теории Янга-Миллса в четырехмерном пространстве времени имеет вид

$$L = -\frac{1}{4g^2} tr(FF^*) = -\frac{1}{4g^2}(F^A{}_B \wedge F^{*B}{}_A)\,, \tag{13.14}$$

где g^2 в общем множителе есть константа связи теории Янга-Миллса. Этот лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований в следствие циклического свойства следа

$$tr([a\,, b]) = 0$$

и того, что коммутатор является дифференцированием

$$[\epsilon\,, FF^*] = [\epsilon\,, F]F^* + F[\epsilon\,, F^*] = -\delta F F^* - F\delta F^* = -\delta(FF^*)\,.$$

Задача 13.12. Доказать, что из определения звездочки Ходжа следует, что

$$\delta F^* = -[\epsilon\,, F^*]\,. \tag{13.15}$$

Действие Янга-Миллса имеет вид

$$S^{YM} = -\frac{1}{4g^2}\int_{M^4} tr(FF^*)\,, \tag{13.16}$$

где интеграл понимается как интеграл четыре-формы по четырехмерному пространству-времени.

Задача 13.13. Убедиться, что в терминах "обычного"интеграла это дает

$$S^{YM} = -\frac{1}{4g^2}\int_{M^4} tr(F_{\underline{nm}}F^{\underline{nm}})\,, \tag{13.17}$$

где подчеркнутые индексы поднимаются с помощью метрики Минковского.

13.2.1 Уравнения

В отсутствие материи, уравнения Янга-Миллса состоят из вариационных уравнений, вытекающих из действия Янга-Миллса,

$$DF^* = 0 \tag{13.18}$$

Задача 13.14. Убедиться
и тождеств Бьянки

$$DF = 0\,. \tag{13.19}$$

Когда есть другие поля Φ^A, нетривиально преобразующиеся относительно преобразований Янга-Миллса, правая часть уравнений содержит ненулевую три-форму тока материальных полей

$$DF^* = J^*\,. \tag{13.20}$$

В абелевом случае группы Янга-Миллса $O(2)$ эти уравнения дают уравнения Максвелла с электромагнитным током в правой части.

В квантовой теории фундаментальных взаимодействий важную роль играют поля Янга-Миллса, удовлетворяющие уравнениям (анти)-самодуальности

$$F = \pm F^*$$

Задача 13.15. Доказать, что любое решение уравнений самодуальности решает и уравнения Янга-Миллса в отсутствие материи.

Решения уравнений (анти)самодуальности называются *инстантонами.* Они были описаны для любых простых групп Янга-Миллса крупными математиками Атьей, Дринфельдом, Хитчиным и Маниным в 1978 году.

13.2.2 Топологические инварианты

Среди инвариантов (13.13) есть важный подкласс инвариантов, зависящих только от F, но не от F^*. Такие инварианты не содержат метрики пространства-времени, входящей через определение звездочки Ходжа, и порождают топологические инварианты вида

$$S^{top} = \int_M L(F)\,, \tag{13.21}$$

где интегрирование ведется по поверхностям M четной размерности равной удвоенной степени по F.

Задача 13.16. Убедиться.

Они обладают рядом замечательных свойств.

Во-первых, любая форма $L = tr(l(F))$ замкнута независимо от размерности пространства-времени.

Задача 13.17. Показать.

Это означает, что S^{top} не зависит от локальных вариаций поверхности интегрирования M, т.е. зависит лишь от ее топологических свойств.

Во вторых, S^{top} не зависит от локальных вариаций поля Янга-Миллса, т.е.

$$\frac{\delta S^{top}(A)}{\delta A(x)} \equiv 0\,. \qquad (13.22)$$

Иными словами, уравнения Эйлера-Лагранжа, отвечающие топологическому действию S^{top}, имеют вид $0 = 0$. Но это не значит, что топологическое действие не зависит от выбора поля Янга-Миллса. Вполне может зависеть от того, какое поле выбрано. Соответствующее действие $S^{top}(A)$ может зависеть от выбора представителей связности в классах эквивалентности, по отношению к локальным вариациям A. Тем самым, топологические инварианты характеризуют многообразие, в котором строится связность A. В математике соответствующие инварианты называются *классами Черна.*

13.2.3 Плоские связности и глобальные симметрии

Поле Янга-Миллса (*связность*) A называется плоской, если его напряженность равна нулю

$$F = 0\,.$$

В соответствии с (13.10) это условие эквивалентно следующему

$$(\mathrm{d} + A)(\mathrm{d} + A) = 0\,. \qquad (13.23)$$

У этого уравнения много решений. Действительно, поскольку $\mathrm{d}^2 = 0$,

$$(\mathrm{d} + A) := g^{-1}(x)\mathrm{d}g(x) = \mathrm{d} + g^{-1}(x)\mathrm{d}(g(x))\,, \qquad (13.24)$$

где $g(x)$ произвольный элемент группы Янга-Миллса удовлетворяет условию (13.23). Иными словами, связность

$$A = g^{-1}(x)\mathrm{d}(g(x)) \qquad (13.25)$$

является плоской.

Задача 13.18. Проверить прямой подстановкой.

Такое поле Янга-Миллса называется *чисто калибровочным* или *тривиальной плоской связностью.*

Замечу, что конечный (неинфинитезимальный) закон преобразования связности порождается аналогичной формулой

$$(\mathrm{d} + A'(x)) := g^{-1}(x)(\mathrm{d} + A(x))g(x)\,, \qquad (13.26)$$

которая дает общий вид калибровочного преобразования

$$A'(x) := g^{-1}(x)\mathrm{d}(g(x)) + g^{-1}(x)A(x)g(x)\,. \qquad (13.27)$$

Отсюда, в частности следует, что чистая калибровка калибровочно эквивалентна нулевой связности $A = 0$.

Нетривиальный вопрос, характеризующий геометрию многообразия, на котором изучаются поля Янга-Миллса, - существуют ли нетривиальные плоские связности, не являющиеся чисто калибровочными? Общий ответ да, если топология многообразия нетривиальна. Например, как мы уже видели, в абелевом случае пространство нетривиальных плоских связностей совпадает с группой когомологий $H^1(M)$.

13.2.4 Глобальные симметрии

Пусть задана плоская связность $A_0(x)$. Ее инфинитезимальные калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta A_0(x) = \mathrm{d}\epsilon(x) + [A_0(x)\,, \epsilon(x)]\,. \tag{13.28}$$

Важный вопрос: какие калибровочные преобразования оставляют поле $A_0(x)$ неизменным? Чтобы на него ответить необходимо решить уравнение

$$\mathrm{d}\epsilon(x) = -[A_0(x)\,, \epsilon(x)]\,. \tag{13.29}$$

Есть ли у него решения? Для ответа на этот вопрос надо проверить *условия совместности*

$$\mathrm{d}[A_0\,, \epsilon] = [\mathrm{d}A_0\,, \epsilon] - \{A_0\,, \mathrm{d}(\epsilon)\} = -[A_0 A_0\,, \epsilon] + \{A_0\,, [A_0\,, \epsilon]\} = 0\,.$$

Задача 13.19. Убедиться

Проверка условий совместности необходима в частности потому, что условие (13.29) содержит больше уравнений, чем неизвестных, поскольку левая часть уравнения является один-формой, а неизвестные, т.е. $\epsilon(x)$ - ноль-форма. Иными словами, уравнение (13.29) является переопределенным. Отмечу, что если бы связность не была плоской, у системы (13.29) могло вообще не быть решений - вместо тождества при проверке условий совместности могли бы получить алгебраическое условие на $\epsilon(x)$, не допускающее нетривиальных решений.

Задача 13.20. Убедиться.

Из Леммы Пуанкаре следует, что решение существует и определяется некоторыми константами $\epsilon_0 = \epsilon_0(x_0)$, где x_0 - любая точка. Легче всего в этом убедиться когда A_0 представлено в виде чистой калибровки. Действительно, вспоминая, что в этом случае

$$(\mathrm{d} + A) = g^{-1}(x)\mathrm{d}g(x)\,, \tag{13.30}$$

легко видеть, что подстановка

$$\epsilon(x) = g^{-1}(x)\epsilon_0 g(x) \tag{13.31}$$

сводит уравнение (13.29) к условию

$$\mathrm{d}\epsilon_0 = 0\,.$$

Задача 13.21. Убедиться

Таким образом, выбранную плоскую связность оставляют инвариантной преобразования (13.31), параметризованные постоянными параметрами ϵ_0, принимающими значениями в алгебре Ли рассматриваемой группы Янга-Миллса. Такие преобразования описывают *глобальные* преобразования симметрии. Несложно убедиться, что они лежат в алгебре Ли g

$$[\epsilon_1(x)\,, \epsilon_2(x)] = g^{-1}(x)[\epsilon_{01}\,, \epsilon_{02}]g(x)\,. \tag{13.32}$$

Наивно, можно было бы спросить, а зачем вообще нужны такие преобразования, если они тривиально действуют на A_0. Ответ состоит в том, что, согласно (13.3), они действуют нетривиально на другие (материальные) поля в системе, описывая глобальные симметрии системы в отсутствие полей Янга-Миллса. Как будет показано в следующей лекции, таким образом группа Пуанкаре пространства Минковского получается из симметрий теории гравитации.

Общая мораль состоит в том, что если в теории есть та или иная глобальная симметрия, ее стоит локализовать путем введения соответствующих калибровочных полей. Обратно, в калибровочной теории глобальные симметрии появляются как симметрии максимально симметричного решения, описываемого той или иной плоской связностью. В следующей лекции мы применим этот подход к гравитации.

Важное замечание состоит в том, что приведенный анализ глобальных симметрий является локальным, т.е. буквально применимым к лишь в некоторой окрестности той или иной точки. Ко всему пространству он применим в случае тривиальной топологии $\mathbb{R}^n$, но может не быть применимым к нетривиальным топологиям таким, как например, сферы или торы, когда параметры симметрий должны уважать топологию, что выражается граничными условиями типа условий периодичности на окружности при сдвиге на 2π, и, как мы знаем, может приводить к существованию нетривиальных плоских связностей, не представимых в форме чистой калибровки (13.25).

Лекция 14.
2 курс. Доп. лекция., 23 марта 2020.
Картановская Гравитация.

Для описания картановской гравитации мы применим конструкцию Янга-Миллса к пространственно-временным симметриям, т.е., алгебре Ли группы Пуанкаре.

14.3 Калибровочные поля группы Пуанкаре

Напомню, что алгебра Ли группы Пуанкаре описывает инфинитезимальные сдвиги и лоренцевы вращения с генераторами

$$P_a = \frac{\partial}{\partial x^a}\,,$$

$$L_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a}\,, \qquad a, b, = 0, \dots d-1\,.$$

Здесь несколько изменены нормировки по сравнению с предыдущим семестром - опущен индекс $-i$ перед генераторами, который неудобен при анализе гравитации. Кроме того, несколько изменен алфавит: $\underline{n} \to a$. Это важная заготовка на будущее, когда мы будем различать индексы форм $(\underline{n})$ и индексы слоя a.

Давайте вспоминать коммутационные соотношения алгебры $iso(1,3)$

$$[P_a\,, P_b] = 0\,,$$

$$[L_{ab}\,, P_c] = \eta_{bc} P_b - \eta_{ac} P_a\,,$$

$$[L_{ab}\,, L_{cd}] = (\eta_{bc} L_{ad} - (c \leftrightarrow d)) - (a \leftrightarrow b)\,.$$

Здесь η_{ab} - метрика Минковского, которая появляется в следствие соотношений $\frac{\partial}{\partial x^a} x^b = \delta^b_a$ и $x_a = \eta_{ab} x^b$, означающих, что

$$\frac{\partial}{\partial x^a} x_b = \eta_{ab}\,.$$

Понимая P_a и L_{ab} как базис $\{t_i\}$ алгебры Пуанкаре iso_d, введем соответствующие калибровочные поля

$$A^i t_i := e^a P_a + \omega^{ab} L_{ab}\,,$$

где один-формы e_a и ω_{ab}

$$e^a = \theta^{\underline{n}} e_{\underline{n}}{}^a\,, \qquad \omega^{ab} := \theta^{\underline{n}} \omega_{\underline{n}}{}^{ab}$$

по традиции обозначают калибровочные поля, ассоциированные с трансляциями и лоренцевыми вращениями, соответственно. Напомню, что калибровочные поля (псевдо)ортогональной группы ω^{ab} антисимметричны по индексам a и b

$$\omega^{ab} = -\omega^{ba}\,. \qquad (14.1)$$

В пространстве Минковского, описываемом декартовыми координатами,

$$e_{\underline{n}}{}^{a} = \delta^{a}_{\underline{n}}\,.$$

Поэтому разница между двумя типами индексов в этом случае несущественна и про нее можно забыть. Но во всех остальных случаях их лучше различать. Как мы постепенно поймем, поля e_a и ω_{ab} как раз и описывают гравитацию в формализме Картана.

Начнем с анализа янг-миллсовской два-формы кривизны и законов калибровочных преобразований, отвечающих алгебре Ли группы Пуанкаре. Согласно общим формулам получаем

$$R^{a}(x) := \mathrm{d}e^{a}(x) + \omega^{a}{}_{b}(x)e^{b}(x)\,, \tag{14.2}$$

$$R^{ab}(x) := \mathrm{d}\omega^{ab}(x) + \omega^{a}{}_{c}(x)\omega^{cb}(x) \tag{14.3}$$

и

$$\delta e^{a}(x) = \mathrm{d}\epsilon^{a}(x) + \omega^{a}{}_{b}(x)\epsilon^{b}(x) - \epsilon^{a}{}_{b}(x)e^{b}(x)\,, \tag{14.4}$$

$$\delta\omega^{ab}(x) = \mathrm{d}\epsilon^{ab}(x) + \omega^{a}{}_{c}(x)\epsilon^{cb}(x) + \omega^{b}{}_{c}(x)\epsilon^{ac}(x)\,. \tag{14.5}$$

где ϵ^a и ϵ^{ab} калибровочные параметры, отвечающие сдвигам и лоренцевым поворотам, соответственно. Индексы a, b опускаются плоской метрикой Минковского η_{ab}, которая входит в определяющие соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре.

Задача 14.1. Проверить.

В картановской гравитации используется следующая терминология.

Поле (один-форма) e^a называется *тетрадой* или *репером.*

Поле (один-форма) ω^{ab} называется *лоренцевой связностью (коэффициенты вращения Ричи, спиновая связность и т.д.).*

R^a называется *два-формой (ко)кручения.*

R^{ab} - *лоренцева кривизна.*

В тетраде e^a сидит поле спина два - метрика.

В R^{ab} - *тензор Римана - риманова кривизна.*

14.4 Пространство Минковского как вакуумное решение для группы Пуанкаре

Рассмотрим следующую плоскую связность

$$e^{a}_{0} = \theta^{\underline{n}}\delta_{\underline{n}}{}^{a}\,, \qquad \omega^{ab}_{0} = 0\,. \tag{14.6}$$

Задача 14.2. Убедиться, что эта связность плоская, т.е. $R^a(e_0,\omega_0) = 0$, $R^{ab}(e_0,\omega_0) = 0$.

Рассмотрим теперь преобразования глобальной симметрии, оставляющие эту связность инвариантной. Условие $\delta\omega^{ab}_0 = 0$ дает

$$\mathrm{d}\epsilon^{ab}_{0} = 0\,.$$

Задача 14.3. Убедиться.

Решение этого условия $\epsilon_0^{ab} = const$ (Лемма Пуанкаре). Тогда второе уравнение

$$\mathrm{d}\epsilon_0^a - \epsilon_{0b}^a e^b = 0$$

дает

$$\epsilon^a = \epsilon_0^a + \epsilon_{0b}^a x^b \,.$$

В соответствии с общим анализом теории Янга-Миллса мы получили постоянные параметры глобальной симметрии Пуанкаре ϵ_0^a и ϵ_0^{ab}, не меняющие плоскую связность (14.6).

Как мы знаем, то же самое произошло бы и в любой другой плоской связности, хотя явный вид преобразований изменится. Можно показать, что переход от одной плоской связности к другой (при условии, что тетрада $e_{\underline{n}}^a$ невырождена) эквивалентен переходу от одной системы координат к другой. Для этого удобно использовать так называемую *Русскую формулу*, которая является следствием формулы Картана.

Пусть $V^{\underline{n}}(x)$ некоторое векторное поле, а A^i поле Янга-Миллса некоторой алгебры Ли g. Введем калибровочный параметр

$$\epsilon^i(x) := i_{V(x)}(A^i(x)) \,. \tag{14.7}$$

Калибровочное преобразование с этим параметром может быть представлено в виде

$$D\epsilon^i(x) = \mathrm{d}\epsilon^i(x) + [A(x)\,, \epsilon(x)]^i = \mathrm{d}i_V A^i + [A, i_V(A)]^i = L_V A^i(x) - i_V(R^i)\,, \tag{14.8}$$

где L_V - производная Ли вдоль векторного поля V.

Задача 14.4. Доказать

Эта формула означает, что, если A^i - плоская связность, то действие на него диффеоморфизма L_V эквивалентно действию калибровочного преобразования с параметром (14.7). Для гравитации в формализме Картана из этой формулы вытекает, что переход от одной плоской связности к другой посредством калибровочного преобразования эквивалентен некоторому диффеоморфизму, т.е. переходу к другим координатам.

Задача 14.5. Доказать

Важное замечание состоит в том, что благодаря условию невырожденности тетрады (эквивалентно метрики) в гравитации - соответствие между вакуумными калибровочными преобразованиями и диффеоморфизмами взаимно однозначно. В частности, русская формула доказывает, что калибровочные преобразования (14.4) описывают диффеоморфизмы с векторным полем $V^{\underline{n}} = \epsilon^{\underline{n}}$, отвечающим движениям пространства Минковского.

14.5 Принцип эквивалентности

Фундаментальные принципы, лежащие в основе теории гравитации и объединяемые словосочетанием *Принцип Эквивалентности*, состоят в требованиях инвариантности теории относительно

- произвольных замен координат (диффеоморфизмов)
- локальных преобразований Лоренца, с параметрами $\epsilon^{ab}(x)$, являющимися произвольными функциями координат.

В формализме Картана первое условие достигается автоматически за счет использования формализма внешней алгебры дифференциальных форм.

Требование локальной лоренцевой симметрии связано с тем, что в теории Эйнштейна гравитационное поле описывается метрическим тензором $g_{\underline{nm}}$, связанным с тетрадой следующим соотношением

$$g_{\underline{nm}}(x) := e_{\underline{n}}^{a}(x) e_{\underline{m}}^{b}(x) \eta_{ab}\,, \tag{14.9}$$

где η_{ab} - плоская метрика Минковского.

Очевидно, это выражение инвариантно относительно локальных преобразований Лоренца

$$e_{\underline{n}}^{a}(x) \to e'^{a}_{\underline{n}}(x) = A^{a}{}_{b}(x) e_{\underline{n}}^{b}(x) \tag{14.10}$$

Требование, чтобы описание гравитации в терминах метрического тензора было эквивалентно описанию в терминах тетрады достигается требованием локальной лоренцевой симметрии.

Задача 14.6. Сравнить число компонент тетрады, метрического тензора и параметров (размерности) группы Лоренца. Показать, что

$$\# g_{\underline{nm}} = \# e_{\underline{n}}^{a} - dim(o(3,1))\,.$$

Иными словами, в тетрадном формализме метрика отвечает классам эквивалентности (орбитам) тетрады по отношению к действию локальных лоренцевых вращений.

Важно, что диффеоморфизмы действуют на подчеркнутые индексы типа $\underline{n}$ и $\underline{m}$ и не действуют на индексы *слоя* $a, b, \ldots$. Локальные лоренцевы преобразования наоборот действуют на индексы слоя $a, b, \ldots$ и не действуют на подчеркнутые индексы $\underline{n}$ и $\underline{m}$.

По определению, лоренцева ковариантная производная тетрады

$$De^{a} = \mathrm{d}e^{a} + \omega^{a}{}_{b} e^{b}\,,$$

что эквивалентно

$$De^{a} = R^{a}\,. \tag{14.11}$$

До сих пор $\omega^{ab}(x)$ выступало как независимое поле - калибровочное поле лоренцевой симметрии. Его можно выразить через тетраду e^{a} и ее производные, наложив условие

$$R^{a} = 0\,. \tag{14.12}$$

Полезно сравнить число уравнений и число компонент в ω^{ab}. Легко видеть, что они совпадают.

Задача 14.7. Убедиться, используя, что компоненты два-формы $R^{a} = \theta^{\underline{n}} \theta^{\underline{m}} R^{a}_{\underline{nm}}$ антисимметричны по подчеркнутым индексам: $R^{a}_{\underline{nm}} = -R^{a}_{\underline{mn}}$.

В результате, условие нулевого кручения (14.12) позволяет выразить один-форму $\omega^{ab}(x)$ алгебраически через тетраду $e^a(x)$ и ее производные. Точнее говоря, это так, если тетрада - обратимая матрица.

Задача 14.8. Найти явное выражение для $\omega^{ab}(e)$, вводя обратную тетраду $e^{\underline{n}}_{a}$.

После этого все оказывается выраженным через тетраду $e^a_{\underline{n}}$ и ее производные.

Лекция 15.
2 курс. Доп. лекция, 30 марта 2020.
Картановская гравитация - продолжение.

В прошлый раз мы остановились на том, что наложили уравнение нулевого кручения (14.12), которое позволяет выразить лоренцеву связность через тетраду и ее производные. Кто-нибудь нашел явное выражение?

Надо сказать, что в этом месте мы существенно отклонились от канонической теории Янга-Миллса. Действительно, мы потребовали, чтобы часть кривизн Янга-Миллса группы Пуанкаре, ассоциированная с трансляциями, равнялась нулю, а остальные, ассоциированные с лоренцевой связностью, - нет. Такое условие нарушает ковариантность подхода по отношению к калибровочной группе Пуанкаре, а именно по отношению к трансляциям пространства-времени. Действительно, формула (14.4) означает, что

$$\delta R^a(x) = R^a{}_b(x)\epsilon^b(x) - \epsilon^a{}_b(x)R^b(x)\,, \tag{15.1}$$

и значит условие $R^a = 0$ не инвариантно относительно калибровочных сдвигов, если $R^a{}_b(x) \neq 0$. Из этой же формулы следует, что условие нулевого кручения инвариантно относительно локальных лоренцевых поворотов.

Итак, наложив условие нулевого кручения, мы выразили лоренцеву связность через тетраду, но потеряли часть калибровочных симметрий теории Янга-Миллса, ассоциированных с подгруппой трансляций. Плохо ли это? Ответ - нет. Действительно, у нас осталось ровно столько симметрий, сколько нужно согласно принципу эквивалентности: локальная лоренцева симметрия и диффеоморфизмы остаются симметриями, оставляя инвариантным условие нулевого кручения. Кроме того, нарушение трансляционной калибровочной симметрии допускает интерпретацию спонтанно нарушенной симметрии в терминах так называемого компенсаторного формализма, заодно обеспечивающего ковариантность определения тетрады.

Так или иначе, это больше не теория Янга-Миллса в чистом виде.

15.6 Тензор кривизны

С учетом уравнения нулевого кручения, два-форма лоренцевой кривизны

$$R^{ab} = \theta^{\underline{n}}\theta^{\underline{m}}R_{\underline{nm},}{}^{ab}(\omega(e))$$

оказывается выраженной через тетраду и ее производные (вплоть до вторых) и, вообще говоря, не равна нулю. По построению, $R_{\underline{nm},}{}^{ab}(\omega(e))$ антисимметричен по первой и второй парам индексов

$$R_{\underline{nm},ab} = -R_{\underline{mn},ab} = -R_{\underline{nm},ba}\,.$$

Если перейти к тензору

$$R_{\underline{nm},\underline{pr}} := e^a_{\underline{p}}e^b_{\underline{r}}R_{\underline{nm},ab}\,,$$

несущему только подчеркнутые индексы, то он оказывается инвариантом локальных преобразований Лоренца

Задача 15.1. Показать

и, как следствие, оказывается выраженным через метрический тензор $g_{\underline{nm}}$ и его производные.

Определенный таким образом тензор $R_{\underline{nm},\underline{pr}}(g)$ совпадает с тензором Римана в метрическом подходе к гравитации. Таким образом, формулировка гравитации Эйнштейна, опирающаяся на риманову геометрию, содержится в картановской формулировке.

Помимо того, что тензор Римана антисимметричен по первой и второй парам индексов, он обладает следующим свойством

$$R_{[\underline{nm},\underline{p}]\underline{r}} = 0\,, \tag{15.2}$$

где квадратные скобки обозначают полную антисимметризацию по индексам $\underline{n}, \underline{m}, \underline{p}$. Это свойство является следствием тождеств Бьянки, примененных к условию нулевого кручения (14.12).

Задача 15.2. Показать

Из (15.2) следует, что тензор Римана симметричен относительно перестановки пар индексов

$$R_{\underline{nm},\underline{pr}} = R_{\underline{pr},\underline{nm}}$$

Задача 15.3. Доказать.

На языке диаграмм Юнга тензор с такими свойствами описывается диаграммой с четырьмя (по числу индексов) ячейками (ящиками), имеющей форму квадрата ⊞ и называемой "окошком".

Из тождества Бьянки, примененного к лоренцевой кривизне, следует

$$D^L(R^{ab}) = 0\,,$$

где D^L - лоренцева ковариантная производная

$$D^L_{\underline{n}} := \partial_{\underline{n}} + \omega^L_{\underline{n}}\,.$$

Задача 15.4. Доказать.

15.7 Взаимодействие с материей

Оставляя в стороне подробности, развитый формализм позволяет описывать различные системы материальных полей в гравитационном поле. Это достигается переходом к индексам слоя с помощью тетрады.

$$A^{\underline{n}} \longrightarrow A^a := e^a_{\underline{n}} A^{\underline{n}}$$

с последующей заменой всех производных на лоренцевы ковариантные производные

$$\partial_{\underline{n}} \to D^L_{\underline{n}}\,.$$

Когда речь идет о дифференциальных формах, применяется внешний дифференциал. Важно заметить, что в таком подходе один-форма тетрады, удовлетворяющая условию ковариантного постоянства в форме (14.11), (14.12), ведет себя как константа, антикоммутируя с лоренцевой производной

$$D^L e^a + e^a D^L = 0\,.$$

Важный пример, иллюстрирующий преимущества картановской формулировки, - поле Дирака спина 1/2. Электрон описывается спинорным полем Дирака $\psi_\alpha(x)$, где α - спинорный индекс. Уравнение Дирака имеет вид

$$\Big(i\partial_a \gamma^a{}_\alpha{}^\beta + m\delta_\alpha^\beta\Big)\psi_\beta(x) = 0\,, \tag{15.3}$$

где γ-матрицы Дирака удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры Клиффорда

$$\{\gamma^a\,,\gamma^b\}_\alpha{}^\beta = 2\eta^{ab}\delta^\alpha_\beta\,, \tag{15.4}$$

порождая ее спинорное представление.

В рамках метрического формализма непонятно как описывать поле Дирака в гравитации, поскольку неясно как определить матрицы $\gamma^{\underline{n}}(x)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\{\gamma^{\underline{n}}(x)\,,\gamma^{\underline{m}}(x)\}_\alpha{}^\beta = 2g^{\underline{nm}}(x)\delta^\alpha_\beta\,. \tag{15.5}$$

Зато в картановской гравитации (тетрадном формализме) никаких проблем. Электрон в гравитационном поле описывается уравнением

$$\Big(ie^{\underline{n}}_a\gamma^a D^L_{\underline{n}} + m\Big)\psi(x) = 0\,, \tag{15.6}$$

где $e^{\underline{n}}_\alpha$ - обратная тетрада ($e^{\underline{n}}_a e^b_{\underline{n}} = \delta^b_a$), а $D^L_{\underline{n}}$ - лоренцева ковариантная производная в спинорном представлении

$$D^L_{\underline{n}}\psi_\alpha := \partial_{\underline{n}}\psi_\alpha + \omega_{\underline{n}}{}^{ab}\sigma_{ab\alpha}{}^\beta\psi_\beta\,.$$

Напомню, что σ_{ab} - генераторы алгебры Лоренца в спинорном представлении

$$\sigma_{ab} := \frac{1}{4}[\gamma_a\,,\gamma_b]\,.$$

Без введения тетрадного формализма (формализма Картана) описание взаимодействия фермионов (полей полуцелых спинов) с гравитационным полем затруднительно. Введение тетрады обеспечивает ковариантную форму извлечения квадратного корня из метрики, что необходимо для ковариантного описания матриц Дирака

$$\gamma_{\underline{n}}(x) = e^a_{\underline{n}}(x)\gamma_a\,,$$

где γ_a - обычные матрицы Дирака в плоском пространстве Минковского.

В формализме Картана действие гравитационного поля может быть записано в виде

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int_{M^4} e_a e_b R_{cd}\epsilon^{abcd}\,,$$

где G - гравитационная постоянная. Это действие явно инвариантно относительно как диффеоморфизмов, так и локальных лоренцевых преобразований.

Задача 15.5. Доказать.

Можно убедиться, что это действие эквивалентно действию Гильберта-Эйнштейна.

В присутствии материи уравнения Эйнштейна выглядят так

$$R_{\underline{nm}} - \frac{1}{2}g_{\underline{nm}}R = 8\pi G T_{\underline{nm}}\,, \tag{15.7}$$

где

$$R_{\underline{nm}} := g^{\underline{pr}}R_{\underline{nr},\underline{pm}}\,, \qquad R := g^{\underline{nm}}R_{\underline{nm}}\,. \tag{15.8}$$

Тензор $R_{\underline{nm}}$ называется *тензором Риччи*, а R - *скалярной кривизной.* $T_{\underline{nm}}$ - тензор энергии-импульса полей материи, создающих гравитационное поле, а G - гравитационная постоянная.

Поле спина 2 (по числу индексов у метрики) называется гравитационным полем и описывает гравитационное взаимодействие материальных полей. В формализме Картана оно описывается тетрадой, а в формализме Римана-Эйнштейна - метрическим тензором.

Гравитационные волны в пустом пространстве (т.е. в отсутствии материи) описываются уравнениями Эйнштейна с $T_{\underline{nm}} = 0$, т.е. $R_{\underline{nm}} = 0$. Это нелинейные уравнения, так как тензор Риччи нелинеен. Слабые гравитационные волны типа тех, что были недавно обнаружены, описываются линейными уравнениями поля спина 2 для слабого поля φ в разложении $g_{\underline{nm}}(x) = \eta_{\underline{nm}} + \varphi_{\underline{nm}}(x)$

$$\Box\varphi_{ab}(x) + a(\partial_a\partial_c\varphi^c{}_b(x) + \partial_b\partial_c\varphi^c{}_a(x)) + b\eta_{ab}\partial_c\partial_d\varphi^{cd}(x) + c\partial_a\partial_b\varphi^c{}_c(x) + d\eta_{ab}\Box\varphi^c{}_c(x) = 0, \tag{15.9}$$

где - a, b, c, d - некоторые коэффициенты. (После перехода к разложению над плоской метрикой Минковского можно использовать индексы любого типа.) Поскольку нелинейные уравнения гравитационного поля были инвариантны относительно диффеоморфизмов

$$\delta g_{\underline{nm}}(x) = \partial_{\underline{n}}(\xi^{\underline{r}}(x))g_{\underline{rm}}(x) + \partial_{\underline{m}}(\xi^{\underline{r}}(x))g_{\underline{rn}}(x) + \xi^{\underline{r}}(x)\partial_{\underline{r}}g_{\underline{nm}}(x) \tag{15.10}$$

их линеариация должна быть инвариантной относительно преобразований вида

$$\delta\varphi_{ab}(x) = \partial_a\epsilon_b(x) + \partial_b\epsilon_a(x)\,.$$

Задача 15.6. Доказать.

Задача 15.7. Найти коэффициенты a, b, c, d, удовлетворяющие этому условию.

Задача 15.8. Объяснить почему решение не единственно.

Уравнение (15.9) обобщают на случай спина 2 уравнения Максвелла и, в свою очередь, обобщаются на случай полей нулевой массы покоя и произвольного спина, называемых полями Фронсдала. Это и есть поля высших спинов. Поскольку нелинейные теории полей спина один и два в высшей степени содержательны, интересно изучить их обобщение на высшие калибровочные симметрии, ассоциированные с полями Фронсдала, с которыми мы уже знакомились. По всей видимости решение этой задачи открывает путь к единой теории фундаментальных взаимодействий - т.е. квантовой гравитации. Движение по этому пути происходит здесь и сейчас.

Подчеркну, что картановский формализм и его дальнейшие обобщения оказываются наиболее адекватными этой задаче, так как применимы к описанию полей всех спинов, не аппелируя к явному введению метрики, ассоциированной с полем спина 2.

Важное замечание состоит в том, что к действию и уравнениям Эйнштейна следует относиться как к приближенной теории верной при достаточно малых энергиях по сравнению с планковским масштабом, определяющимся гравитационной постоянной G

$$m_P = G^{-\frac{1}{2}} = 10^{19} GeV\,.$$

Действительно, легко понять, что G должна иметь размерность cm^2, чтобы действие было безразмерным (мы работаем в системе единиц $e = \hbar = 1$ в которой действие, имеющее ту же размерность, что и $\hbar$, безразмерно). Добавление к действию Эйнштейна членов старших степеней по тензору кривизны потребует введения старших (неотрицательных) степеней G, вклад которых будет исчезающе мал при низких энергиях (эквивалентно, в длинноволновом приближении, когда малы производные - вспомните как выглядит оператор 4-импульса на релятивистских полях.) Масштаб энергий, на котором поправки станут существенны и есть планковский масштаб. На этом масштабе все поправки несущественные при низких энергиях могут давать вклад одного порядка и их необходимо учитывать. Поскольку таких поправок бесконечно много (любые нелинейные комбинации тензора кривизны и его производных) для их описания нужен организующий принцип. Таким принципом как раз и могут служить высшие симметрии в теории высших спинов.

В заключение замечу, что среди нелинейеых по кривизне поправок есть и топологические инварианты аналогичные тем, которые мы обсуждали в случае теории Янга-Миллса. Самые простые из них порождаются четыре-формами

$$I^P = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^4} R^{ab}(\omega) R_{ab}(\omega)\,, \qquad I^E = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma^4} R_{ab}(\omega) R_{cd}(\omega) \varepsilon^{abcd}\,.$$

Задача 15.9. Проверить, что подынтегральные формы замкнуты, а инварианты в случае замкнутых Σ^4 не зависят от локальных вариаций калибровочных полей (в данном случае - лоренцевой связности в $R_{ab}(\omega)$).

Оказывается, что I^E задает Эйлерову характеристику Σ^4, а I^P - число Понтрягина.