Лекция 5.
2 курс, Осенний семестр, 8 октября 2020.

5.1 Дифференцирование в алгебре

Фундаментальный факт, обсуждавшийся в лекции от 24 сентября, состоит в том, что коммутатор в ассоциативной алгебре является ее *дифференцированием*, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница

$$[a\,,bc] = [a\,,b]c + b[a\,,c]\,. \tag{5.1}$$

Задача 5.1. Проверить тем, кто забыл.

Пусть теперь A - $\mathbb{Z}_2$–градуированная алгебра. По определению, *однородные элементы* обладают определенной четностью, т.е. принадлежат либо A^+ либо A^-. Соответственно, таким элементам a сопоставляется четность

$$\pi(a) = 0: \qquad a \in A^+\ , \qquad \pi(a) = 1: \qquad a \in A^-\,. \tag{5.2}$$

Градуированным коммутатором или *суперкоммутатором* называется следующая комбинация

$$[a\,,b]_\pm := ab - (-1)^{\pi(a)\pi(b)}ba\,. \tag{5.3}$$

Задача 5.2. Проверить, что если хотя бы один из элементов a и b является четным, то суперкоммутатор сводится к коммутатору, а если оба нечетные - то к антикоммутатору.

Суперкоммутатор порождает нечетное дифференцирование (супердифференцирование), удовлетворяющее градуированному правилу Лейбница.

$$[a\,,bc]_\pm = [a\,,b]_\pm c + (-1)^{\pi(a)\pi(b)}b[a\,,c]_\pm\,. \tag{5.4}$$

Задача 5.3. Проверить

В частном случае, когда все a, b, c нечетны, это дает

$$[a\,,bc] = \{a\,,b\}c - b\{a\,,c\}\,. \tag{5.5}$$

Задача 5.4. Проверить это равенство

Как обсуждалось в лекции от 24 сентября, в общем случае, дифференцированием алгебры A (ассоциативной или алгебры Ли) называется любая линейная операция D, удовлетворяющая правилу Лейбница,

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)\,. \tag{5.6}$$

Дифференцирования $D_a(b) := [a\,,b]$, порожденные коммутаторами с элементами $a \in A$ называются *внутренними*. Дифференцирования D, которые не порождены коммутаторами, называются *внешними*.

Дифференцирования образуют алгебру Ли $D(A)$ по отношению к их коммутированию

$$D_{1,2}(b) := D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b))\,. \tag{5.7}$$

Внутренние дифференцирования $D^{in}(A)$ образуют идеал $D(A)$.

Таким образом, внешние дифференцирования можно отождествить с элементами фактор-алгебры $D(A)/D^{in}(A)$.

Задача 5.5. Распространить введенные выше определения на случай суперкоммутаторов, используя следующее понятие супералгебры Ли.

Определение.
Алгебра S называется супералгеброй Ли, если она $\mathbb{Z}_2$-градуирована и для однородных элементов, обладающих определенной четностью, ее закон композиции $[a\,,b]_\pm$ удовлетворяет следующим условиям (анти)симметрии

$$[a\,,b]_\pm = -(-1)^{\pi(a)\pi(b)}[b\,,a]_\pm$$

и тождеству Якоби

$$(-1)^{\pi(a)\pi(c)}[a\,,[b\,,c]_\pm]_\pm + (-1)^{\pi(a)\pi(b)}[b\,,[c\,,a]_\pm]_\pm + (-1)^{\pi(b)\pi(c)}[c\,,[a\,,b]_\pm]_\pm = 0\,.$$

Замечание: В этом определении $[a\,,b]_\pm$ обозначает произведение в супералгебре Ли, которое не обязательно выражается через градуированный коммутатор в какой-то ассоциативной алгебре.

Задача 5.6. Проверить, что тождество Якоби действительно становится тождеством, если суперлиевское произведение $[a\,,b]_\pm$ реализовано как суперкоммутатор (5.3).

Замечание: Четные элементы супералгебры Ли образуют подалгебру, которая является алгеброй Ли.

Задача 5.7. Доказать.

Дифференцирования могут быть четными и нечетными.

Дифференцирование D - четно, если $\pi(D(a)) = \pi(a)$ и нечетно, если $\pi(D(a)) = 1-\pi(a)$, т.е. четные дифференцирования не меняют четность элемента, на которой они действуют, а нечетные - меняют. Иными словами,

$$\pi(D(a)) = \pi(D) + \pi(a) \qquad \text{по модулю } 2\,.$$

Суперобобщение правила Лейбница имеет вид

$$D(bc) = D(b)c + (-1)^{\pi(D)\pi(b)} bD(c)\,. \tag{5.8}$$

Задача 5.8. Проверить, что для внутренних супердифференцирований это определение согласовано с формулой (5.4), в которой четность внутреннего супердифференцирования $D(b) := [a\,,b]$ совпадает с четностью a.

Задача 5.9. Проверить, что супердифференцирования образуют супералгебру Ли по отношению к так введенной четности.

5.2 Связь с группой Лоренца

Почему же алгебра Клиффорда так важна для релятивистской физики? Потому что ее представления порождают представления (псевдо)ортогональных алгебр Ли - спинорные представления. Это следует из того факта, что элементы

$$L_{nm} := -\frac{i}{4}[\phi_n\,, \phi_m] \tag{5.9}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $o(d)$ или $o(d-1,1)$ при η_{nm} с сигнатурой Минковского.

В этом легче всего убедиться, используя правила (супер)дифференцирования (супер) коммутаторов. Сначала получаем с помощью (5.5), используя $\mathbb{Z}_2$–градуировку алгебры Клиффорда,

$$[\phi_l\,, L_{nm}] = -\frac{i}{4}(\{\phi_l\,, \phi_n\}\phi_m - \phi_n\{\phi_l\,, \phi_m\}) - n \leftrightarrow m = -i(\eta_{ln}\phi_m - \eta_{lm}\phi_n)\,. \tag{5.10}$$

Задача 5.10. Доказать.

После этого, используя, что коммутатор является дифференцированием, после несложного вычисления получаем

$$[L_{nm}\,, L_{kl}] = -i(\eta_{mk}L_{nl} - \eta_{nk}L_{ml} - \eta_{ml}L_{nk} + \eta_{nl}L_{mk})\,. \tag{5.11}$$

Задача 5.11. Доказать.

Таким образом, всякое представление алгебры Клиффорда порождает представление алгебры Ли группы Лоренца. Так возникают спиноры. Построением представлений алгебры Клиффорда мы и займемся после того как обсудим несколько связанных общих понятий.

5.3 $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры

Алгебра A называется $\mathbb{Z}$-градуированной, если

$$A = \oplus_{i=-\infty}^{\infty} A_i \tag{5.12}$$

как линейное пространство (каждое A_i – подпространство A) и выполнено условие

$$A_i A_j \subset A_{i+j}\,, \tag{5.13}$$

т.е., $\forall a \in A_i$, $b \in A_j$: $ab \in A_{i+j}$.

Замечание: алгебра A может быть конечномерной. В этом случае лишь конечное число подпространств A_i не пусто.

Задача 5.12. Доказать, что $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра является $\mathbb{Z}_2$-градуированной.

Всякая $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра A содержит три естественных подалгебры A_+, A_0 и A_-, состоящие, соответственно, из элементов с положительной, нулевой и отрицательной градуировкой. Кроме того она содержит подалгебры $\bar{A}_+$ и $\bar{A}_-$, состоящие, соответственно, из элементов с неотрицательной и неположительной градуировкой.

Задача 5.13. Доказать.

5.4 Алгебра полиномов

Пусть A - алгебра полиномов $p(x)$ одной переменной x

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots \tag{5.14}$$

с конечным числом ненулевых коэффициентов p_i.

Задача 5.14. Ввести $\mathbb{Z}$-градуировку в A.

5.4.1 Алгебра Клиффорда

Оказывается, что алгебра Клиффорда $\mathcal{C}l_d$ с четным d $\mathbb{Z}$-градуирована. Чтобы это увидеть, надо перейти к другому базису. Именно, в $\mathcal{C}l_d$ с четным d можно выбрать образующие ψ_a^- и ψ^{+a} с $a = 1, \ldots, d/2$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\{\psi_a^-\,, \psi^{+b}\} = \delta_a^b\, Id\,, \qquad \{\psi_a^-\,, \psi_b^-\} = 0\,, \qquad \{\psi^{+a}\,, \psi^{+b}\} = 0\,. \tag{5.15}$$

Задача 5.15. Убедиться.

Подсказка: Постройте $\psi_a^\pm$ из ϕ_n в случаях алгебр Клиффорда с двумя образующими с метрикой Минковского (сигнатура (1,-1)) и Евклида (сигнатура (1,1)).

В терминах образующих $\psi_a^\pm$ элемент

$$\Psi = \psi_{a_1}^+ \ldots \psi_{a_{l_+}}^+ \psi_{a_1}^- \ldots \psi_{a_{l_-}}^- \tag{5.16}$$

наделяется $\mathbb{Z}$-градуировкой

$$\mathrm{deg}\Psi := l_+ - l_-\,. \tag{5.17}$$

Задача 5.16. Доказать, что это правило задает $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Клиффорда.

5.4.2 Алгебра матриц

Пусть $a^i{}_j \in Mat_n(\mathbb{C})$ элемент алгебры $n \times n$ матриц с законом композиции

$$(ab)^i{}_j = a^i{}_k b^k{}_j\,, \qquad i, j, k = 1, \ldots n\,.$$

(По повторяющимся индексам производится суммирование.)

Задача 5.17. Проверить, что $Mat_n(\mathbb{C})$ допускает следующую $\mathbb{Z}$-градуировку:

$$\mathrm{Deg}\, a^i{}_j := i - j\,,$$

т.е., что $\mathrm{Deg}\, ab = \mathrm{Deg}\, a + \mathrm{Deg}\, b$. В этом случае пространства A_i в (5.12) реализованы матрицами с ненулевыми элементами на различных побочных диагоналях.

Задача 5.18. Убедиться и найти число ненулевых A_i в $Mat_n(\mathbb{C})$.

Задача 5.19. Убедиться, что элементы с положительной, отрицательной и нулевой градуировкой описывают верхние треугольные, нижние треугольные и диагональные матрицы, соответственно.

Задача 5.20. Доказать, что верхние треугольные матрицы (с диагональю или без) образуют подалгебру алгебры матриц.

Лекция 6.
2 курс, Осенний семестр, 15 октября 2020

6.1 Левые и правые модули

Прежде чем построить спинорный модуль алгебры Клиффорда, рассмотрим общий случай $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры. Все равно какой - алгебры Ли или ассоциативной.

В случае ассоциативных алгебр различают левые и правые модули.

Прежде всего напомню, что *модуль алгебры* A или l это линейное пространство V, в котором алементы алгебры $a \in A$ реализованы матрицами (линейными операторами) ${a^i}_j$, произведение которых согласовано с законом композиции в алгебре в том смысле, что

$$
{(a \circ b)^i}_j = {a^i}_k {b^k}_j \,. \tag{6.1}
$$

Левый модуль определяется "естественным образом"(значок $\circ$ будем опускать)

$$
ab(v) = a(b(v)) \quad \forall a, b \in A \quad v \in V \,. \tag{6.2}
$$

Левым он называется потому, что при таком определении a стоит слева от v.

Правый модуль получается, если элементы алгебры стояли бы справа от v. Эквивалентно, в этом случае можно потребовать

$$
ab(v) = b(a(v)) \quad \forall a, b \in A \quad v \in V \,. \tag{6.3}
$$

Задача 6.1. Убедиться, что это модуль.

В случае алгебры матриц $Mat_n(\mathbb{C})$ столбцы v^i и строки v_i $(i = 1, \dots n)$ образуют ее модули с законом действия

$$
a(v^i) := {a^i}_j v^j \,, \qquad a(v_i) = v_j {a^j}_i \,. \tag{6.4}
$$

Задача 6.2. Какие это модули?

Замечание: Этот пример является базисным - левые и правые модули ассоциативных алгебр обычно можно понимать как столбцы и строки - иногда бесконечномерные.

Пусть A-ассоциативная алгебра с произведением $a \circ b$. Определим *транспонированную алгебру* $\tilde{A}$ с произведением $\tilde{\circ}$ таким, что как линейное пространство она совпадает с A, а произведение имеет вид.

$$
a \tilde{\circ} b := b \circ a \,. \tag{6.5}
$$

Задача 6.3. Доказать, что $\tilde{A}$ - ассоциативная алгебра.

Задача 6.4. Убедиться, что $\tilde{\tilde{A}} = A$.

Задача 6.5. Убедиться, что левые модули A совпадают с правыми модулями $\tilde{A}$ и наоборот.

Это простое наблюдение имеет важное следствие. Если алгебра A изоморфна своей транспонированной $\tilde{A}$, то ее левые и правые модули изоморфны.

В применении к алгебре Клиффорда, эта простая лемма имеет важное и не вполне тривиальное следствие, что существует матрица зарядового сопряжения, связывающая левые и правые модули. С точки зрения физики эта матрица связывает частицы с античастицами.

Задача 6.6. Доказать, что $\widetilde{\mathcal{C}l_d} = \mathcal{C}l_d$

Задача 6.7. Как связаны левые и правые модули алгебр Ли?

Задача 6.8. Какая операция устанавливает изоморфизм левого и правого модулей алгебры матриц?

Операция транспонирования. В общем случае операция транспонирования порождается той или иной билинейной формой и называется антиавтоморфизмом. По определению, *антиавтоморфизмом* алгебры A называется взаимно однозначное линейное отображение A в себя $\rho(a) \in A$, такое что, $\forall a, b \in A$

$$\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)\,. \tag{6.6}$$

Напомню, что *автоморфизмом* алгебры A называется такое взаимно однозначное линейное отображение A в себя $\tau(a) \in A$, такое что, $\forall a, b \in A$

$$\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)\,. \tag{6.7}$$

Пусть η_{ij} невырожденная матрица (в действительности, ее лучше называть билинейной формой)

$$\det|\eta_{ij}| \neq 0\,.$$

Мы будем использовать стандартное соглашение, что матрица η^{ij} обратна к η_{ij}, т.е.

$$\eta_{ik}\eta^{kj} = \delta_i^j$$

и, эквивалентно,

$$\eta^{ik}\eta_{kj} = \delta_j^i$$

Задача 6.9. Доказать, что отображение

$$\rho(a^i{}_j) := \eta^{ik}\eta_{lj}a^l{}_k \tag{6.8}$$

порождает антиавтоморфизм алгебры матриц.

Задача 6.10. Доказать, что отображение

$$\tau(a^i{}_j) := U^i{}_k a^k{}_l U^{-1l}{}_j \tag{6.9}$$

порождает автоморфизм алгебры матриц для любой обратимой матрицы $U^i{}_j$.

6.1.1 Модули $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр

Пусть V - $\mathbb{Z}$-градуированное линейное пространство

$$V = \oplus_{n=-\infty}^{\infty} V_n \,. \tag{6.10}$$

Модуль V $\mathbb{Z}$-градуирован, если

$$A_n(V_m) \subset V_{n+m} \,. \tag{6.11}$$

Рассмотрим подалгебру нулевой градуировки $A_0 \subset A$. Все однородные подпространства $V_n \subset V$ образуют A_0-модули.

Можно задать вопрос (заданный на лекции) а бывают ли не $\mathbb{Z}$–градуированные модули $\mathbb{Z}$–градуированных алгебр? В соответствии со сказанным выше, ответ на этот вопрос во многом определяется структурой A–модуля V как A_0–модуля. Общий ответ - да, такие модули существуют. Кому интересно - можно обсудить пример после лекции.

A-модуль V называется *модулем младшего веса*, если все подпространства V_n с $n < 0$ равны нулю, т.е. в этом случае

$$V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n \,. \tag{6.12}$$

Подпространство V_0 часто называется вакуумным как в физике, так и в математике. Связано это с тем, что в физике (квантовой механике) градуирующим оператором часто является энергия, так что вакуумный вектор обладает наинизшей энергией.

Задача 6.11. Доказать.

В частности, V_0 образует A_0-модуль. Числа, характеризующие V_0 как A_0-модуль, называются его весами (точный смысл этому термину придается в теории представлений алгебр Ли). По определению, V_0 аннигилируется всеми элементами отрицательной градуировки, т.е.

$$A_-(V_0) = 0 \,. \tag{6.13}$$

Весь модуль V порождается действием A_+

$$V = A_+(V_0) \,. \tag{6.14}$$

Важно, что не все различные элементы A_+ порождают линейно независимые элементы V. Действительно, элементы $A_+ \oplus A_0$, которые могут быть представлены в виде b_+a_- с любыми b_+ и a_- дают ноль при действии на V_0. Поэтому V порождается только теми элементами A_+, которые не могут быть представлены в таком виде.

В качестве достаточно большого домашнего задания предлагаю проанализировать левый модуль алгебры матриц Mat_n, разбив анализ на несколько задач.

Задача 6.12. Доказать, что любой модуль алгебры матриц Mat_n содержит вакуумное одпространство V_0. Найти V_n.

Задача 6.13. Найти A_0 и те ее элементы, которые действуют нулем на V_0.

Задача 6.14. Найти как действует элемент A_0, действие которого отлично от нуля на V_0.

Задача 6.15. Доказать, что V содержит ровно n однородных подпространств.

Задача 6.16. * Доказать, что каждое из однородных подпространств одномерно. (Эта задача отмечена звездочкой как относительно сложная.)

Задача 6.17. Доказать, что возникающий в результате модуль есть ни что иное как столбец.

Эта конструкция весьма общая и применяется к широкому классу модулей ассоциативных алгебр и алгебр Ли. Важный вопрос о (не)приводимости получающихся модулей переформулируется в этих терминах на языке сингулярных векторов следующим образом. Если модуль V приводим - он содержит подмодуль $V' \subset V$. V' может быть разложен в сумму однородных подпространств

$$V' = \sum_{i=i_0}^{i^{max}} V'_i \tag{6.15}$$

Очевидно, поскольку V' образует подмодуль, подпространство младшей градуировки V'_{i_0} обладает свойствами вакуума V_0: аннигилируется всеми отрицательными элементами и образует A_0-модуль.

Задача 6.18. Доказать.

Вакуумные элементы V_{i_0} называются *сингулярными векторами.* Таким образом, критерием приводимости модуля младшего веса является наличие сингулярнрных вектора в каком-либо однородном пространстве V_k с $k > 0$. Решение задачи о нахождении сингулярных векторов не всегда просто, но она поддается решению специальными методами теории представлений.

6.2 Спиноры

Применим теперь конструкцию модулей младшего веса к алгебре Клиффорда. Прежде всего заметим, что в случае алгебры Клиффорда любой ее модуль содержит некоторый вакуумный вектор.

Задача 6.19. Доказать.

Мы обозначим его как $|0\rangle$, используя квантово-механические обозначения Дирака. (0 здесь обозначает вакуумное состояние.) Таким образом,

$$\psi_a^-|0\rangle = 0\,.$$

Отсюда следует, что все элементы алгебры Клиффорда, содержащие ψ_a^- справа, действуют на вакуум нулем. Если элемент содержит ψ_a^- в середине $a\psi_a^- b$, то, используя определяющие соотношения алгебры Клиффорда, ψ_a^- можно протащить направо, пока он либо не окажется справа, либо не исчезнет при антикоммутировании с одним из ψ_b^+. В результате, элементы, обладающие нетривиальным действием на вакуум, исчерпываются всевозможными функциями от ψ_b^+. Соответствующее пространство V называется пространством Фока и обозначается F_d. Таким образом, общий элемент левого модуля

F_d алгебры Клиффорда $\mathcal{C}l_d$ с четным d имеет вид

$$|v\rangle \in F_d : \qquad |v\rangle = \sum_{p=0}^{d/2} v_{a_1\ldots a_p}\psi^{+a_1}\ldots\psi^{+a_p}|0\rangle \,, \tag{6.16}$$

где $v_{a_1\ldots a_p}$ - произвольные коэффициенты полностью антисимметричные по индексам $a_1\ldots a_p$, каждый из которых принимает $d/2$ значений. Действительно, действие любого элемента алгебры Клиффорда на $v\in F_d$ дает какой-то другой элемент F_d.

Задача 6.20. Доказать.

Элементы F_d называются *спинорами.* Вычисление, аналогичное вычислению размерности алгебры Клиффорда, дает

$$\dim\, F_d = 2^{d/2}\,. \tag{6.17}$$

Задача 6.21. Доказать.

F_d является неприводимым левым $\mathcal{C}l_d$–модулем. В этом несложно убедиться, показав, что действуя подходящим элементом алгебры Клиффорда на любой элемент $|v\rangle\in F_d$, его можно отобразить в любой другой элемент $|v'\rangle\in F_d$.

Задача 6.22. Доказать.

Также нетрудно доказать, что всякий неприводимый левый $\mathcal{C}l_d$–модуль изоморфен F_d.

Задача 6.23. Доказать, используя, что каждый левый модуль алгебры Клиффорда содержит вакуумный элемент, аннигилируемый всеми ψ^-_a.

Правый модуль Фока F^*_d определяется аналогично

$$\langle v| \in F^*_d : \qquad \langle v| = \sum_{p=0}^{\frac{d}{2}}\langle 0|v^{a_1\ldots a_p}\psi^-_{a_1}\ldots\psi^-_{a_p}\,, \qquad \langle 0|\psi^{+a} = 0\,. \tag{6.18}$$

Эти результаты допускают следующую простую и уже известную нам интерпретацию: алгебра Клиффорда $\mathcal{C}l_d$ с четным d изоморфна алгебре $2^{d/2}\times 2^{d/2}$ матриц $Mat_{2^{d/2}}$. Левые и правые модули $\mathcal{C}l_d$ являются пространствами столбцов и строк по отношению к этой матричной алгебре.

Элементы F_d мы будем обозначать $\chi_{\hat\alpha}$, где спинорный индекс $\hat\alpha = 1,\ldots 2^{d/2}$ нумерует элементы F_d. Элементы F^*_d обычно обозначаются $\bar\chi^{\hat\alpha}$. Общие элементы $\mathcal{C}l_d$ описывают все матрицы $A_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}$. В частности, ϕ_n реализуются как γ–матрицы $\gamma_{n\hat\alpha}{}^{\hat\beta}$. Замечу, что в четырех измерениях спинорные индексы принимают $2^2=4$ значения.

Следует подчеркнуть важное отличие спиноров и тензоров. Размерность тензорных модулей алгебры Лоренца растет полиномиально с размерностью пространства-времени d. Например, число компонент общего тензора $A_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ в d измерениях равна d^k. С другой стороны, размерность спинорного модуля растет экспоненциально с d. Это затрудняет построение теорий в высших измерениях со сбалансированным числом бозонов и фермионов, как это требуется принципом суперсимметрии. Достижение этого баланса в конечном счете и приводит к таким выделенным размерностям, как $d=10$ и $d=11$ в теории суперструн и М-теории.

Лекция 7.
2 курс, Осенний семестр, 22 октября 2020.

7.1 Спиноры

На прошлой лекции мы показали, что пространство Фока F_d, реализующее левый модуль алгебры Клиффорда, образовано векторами вида

$$|v\rangle \in F_d : \qquad |v\rangle = \sum_{p=0}^{d/2} v_{a_1\dots a_p}\psi^{+a_1}\dots\psi^{+a_p}|0\rangle\,, \tag{7.1}$$

где $v_{a_1\dots a_p}$ - произвольные полностью антисимметричные по индексам a_i коэффициенты, а вакуумный вектор удовлетворяет условию

$$\psi^-_a|0\rangle = 0\,.$$

Элементы F_d мы будем обозначать $\chi_{\hat\alpha}$, где спинорный индекс $\hat\alpha = 1,\dots 2^{d/2}$ нумерует элементы F_d. Элементы F_d^* обычно обозначаются $\bar\chi^{\hat\alpha}$. Общие элементы $\mathcal{C}l_d$ описывают все матрицы $A_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}$. В частности, ϕ_n реализуются как γ–матрицы Дирака $\gamma_{n\hat\alpha}{}^{\hat\beta}$. В четырех измерениях спинорные индексы принимают $2^2 = 4$ значения.

По построению, матрицы Дирака реализуют представление алгебры Клиффорда, удовлетворяя соотношениям

$$\{\gamma_n\,,\gamma_m\}_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta} = 2\eta_{nm}\delta_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}\,. \tag{7.2}$$

На лекции 4 мы убедились, что элементы алгебры Клиффорда

$$L_{nm} := \frac{1}{4}[\phi_n\,,\phi_m] \tag{7.3}$$

образуют алгебру Ли группы Лоренца по отношению к коммутированию.

Замечание: мы вернулись к нормировке элементов алгебры Ли без мнимой единицы с коммутационными соотношениями

$$[L_{nm}\,,L_{kl}] = \eta_{mk}L_{nl} - \eta_{nk}L_{ml} - \eta_{ml}L_{nk} + \eta_{nl}L_{mk}\,.$$

Значит всякое представление алгебры Клиффорда порождает представление алгебры Ли группы Лоренца. В частности, построенный модуль Фока F_d образует представление $o(d-1,1)$, если метрика в определении алгебры Клиффорда η^{nm} была метрикой Минковского.

Важный вопрос: является ли этот модуль неприводимым? Легко видеть, что нет. Действительно, модуль Фока можно представить в виде прямой суммы двух подпространств

$$F_d = F_d^E \oplus F_d^O\,,$$

состоящих из элементов (7.1) с четными и нечетными p, соответственно. Несложно видеть, что каждое из этих подпространств образует $o(d-1,1)$-модуль.

Задача 7.1. Доказать.

Другой важный факт состоит в том, что, как следствие тождества $(1-1)^{d/2}=0$, подпространства F_d^E и F_d^O имеют одинаковую размерность

$$\dim F_d^E = \dim F_d^O = 2^{d/2-1}\,. \tag{7.4}$$

Задача 7.2. Доказать.

Другой способ увидеть приводимость F_d это вспомнить про элемент Γ (**??**)

$$\Gamma := i^{\frac{d(d-1)}{2}}\sqrt{det|\eta|}\phi_0\phi_1\ldots\phi_{d-1}\,. \tag{7.5}$$

Хотя он антикоммутирует с ϕ_n при четном d, он коммутирует с любым четным числом ϕ_n и, в частности, с L_{nm} (7.3).

Задача 7.3. Доказать.

Следовательно,

$$F_d^{\pm} := P^{\pm}F_d\,, \qquad P^{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm \Gamma) \tag{7.6}$$

образуют инвариантные подпространства по отношению к действию алгебры Лоренца. Элементы F_d^+ и F_d^- называются *киральными* (*левыми* и *правыми*) спинорами. Размерности $F_d^{\pm}$

$$\dim F_d^{\pm} = 2^{\frac{d}{2}-1}\,. \tag{7.7}$$

В частности киральные спиноры в четырехмерном пространстве-времени имеют две компоненты.

Можно убедиться, что разложения $F_d = F_d^+ \oplus F_d^-$ и $F_d = F_d^O \oplus F_d^E$ эквивалентны, т.е. F_d^+ изоморфен либо F_d^O либо F_d^E а F_d^- - второму.

Задача 7.4. Доказать. (Задача чуть сложнее остальных.)

В частности, размерность кирального спинора в десяти измерениях равна 16, что не так уж сильно превышает 10, все еще позволяя строить суперсимметричные модели.

7.2 Представления группы Лоренца

Давайте теперь проанализируем как группа Лоренца действует на векторное и спинорное представления. Более точно, мы рассмотрим действие подгруппы вращений группы Лоренца. Поскольку, как мы убедились в прошлом семестре, любое вращение сводится к вращению в той или иной плоскости, не теряя общности можно выбрать элементарное вращение так, как удобно. Пусть это будет вращение в плоскости x_1, x_2.

7.2.1 Вращение вектора

Для начала давайте вспомним как вращения действуют на вектор. Как известно из школы и как мы убедились в прошлом семестре, закон преобразования компонент вектора x_1 и x_2 имеет вид

$$x_1' = \cos(\varphi)x_1 + \sin(\varphi)x_2\,,$$

$$x_2' = \cos(\varphi)x_2 - \sin(\varphi)x_1\,.$$

Отсюда, в частности, следует что поворот плоскости на 2π сводится к единичному преобразованию. В комплексных координатах

$$z = x_1 + ix_2\,, \qquad \bar{z} = x_1 - ix_2\,,$$

закон преобразований имеет вид

$$z' = \exp(-i\varphi)z\,, \qquad \bar{z}' = \exp(i\varphi)\bar{z}$$

Задача 7.5. Убедиться

Это соответствует следующему действию генератора алгебры Ли L_{12} поворота в комплексной плоскости z:

$$L_{12}z = -iz\,, \qquad L_{12}\bar{z} = i\bar{z}\,.$$

Задача 7.6. Проверить, вспомнив, что групповой элемент связан с генератором алгебры Ли экспоненциальным отображением

$$g = \exp(\varphi L_{12})\,.$$

7.2.2 Вращение спинора

Рассмотрим теперь случай спинорного представления. В случае алгебры Клиффорда генератор вращений в плоскости x_{12} имеет вид

$$L_{12} = \frac{1}{2}\phi_1\phi_2\,.$$

Задача 7.7. Убедиться

Вводя операторы рождения и уничтожения

$$\psi^{\pm} = \frac{1}{2}(\phi_1 \pm i\phi_2)\,,$$

получаем, что соответствующее пространство Фока двумерно с базисными векторами

$$|0\rangle\,, \qquad \psi^+|0\rangle\,.$$

(Напомню, что $\psi^-|0\rangle = 0$.) Как $o(2)$-модуль F_2 распадается в сумму двух одномерных подмодулей

$$F^E = \lambda|0\rangle\,, \qquad F^O = \lambda\psi^+|0\rangle\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

В терминах $\psi^{\pm}$, L_{12} имеет вид

$$L_{12} = i(\psi^+\psi^- - \frac{1}{2})\,.$$

Задача 7.8. Проверить.

Это дает

$$L_{12}|0\rangle = -\frac{i}{2}|0\rangle\,, \qquad L_{12}\psi^+|0\rangle = \frac{i}{2}\psi^+|0\rangle$$

откуда в частности следует, что F^E и F^O действительно являются инвариантными подпространствами по отношению к поворотам в плоскости x_{12}.

Таким образом, при вращении в плоскости закон преобразования спинора отличается от закона преобразования вектора коэффициентом $\frac{1}{2}$. Соответственно, групповое преобразование спинора имеет вид

$$\exp(L_{12})|0\rangle = \exp(-\frac{i}{2}\varphi)|0\rangle\,,$$

$$\exp(\varphi L_{12})\psi^+|0\rangle = \exp(\frac{i}{2}\varphi)\psi^+|0\rangle\,.$$

Сравнивая эту формулу с законом преобразования вектора видим, что спинор крутится вдвое медленней чем вектор. В частности, при повороте на 2π он не возвращается обратно, а меняет знак. Чтобы вернуться обратно требуется поворот на 4π. С математической точки зрения это означает, что спиноры образуют модули не псевдоортогональных групп $SO(p,q)$, а их двукратных накрывающих, которые обозначаются $Spin(p,q)$. Замечу, что алгебры Ли $SO(p,q)$ и $Spin(p,q)$ совпадают и равны $o(p,q)$.

Почему же мы все же думаем, что периодичность в нашем мире имеет место при поворотах на 2π а не 4π? Оказывается, что физические наблюдаемые всегда содержат четные комбинации полей полуцелых спинов, которые инвариантны при повороте на 2π. Это связано с принципом Паули в квантовой механике, выражающем $\mathbb{Z}_2$ градуировку алгебры физических наблюдаемых, по отношению к которой частицы целых спинов (бозоны) четны, а полуцелых спинов (фермионы) - нечетны.

Важный факт, установленный на предыдущих лекциях, состоит в том, что

$$[L_{nm}\,, \phi_l] = \eta_{lm}\phi_n - \eta_{ln}\phi_m\,. \tag{7.8}$$

В спинорном представлении, когда образующие ϕ_n реализуются как γ-матрицы $\gamma_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}$, это свойство обеспечивает релятивистскую инвариантность уравнения Дирака, которым мы сейчас и займемся.

7.3 Уравнение Дирака

Уравнение Дирака имеет вид

$$\left(i\gamma^n{}_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}\frac{\partial}{\partial x^n} + m\,\delta^{\hat\beta}_{\hat\alpha}\right)\psi_{\hat\beta}(x) = 0\,, \tag{7.9}$$

где $\psi_{\hat\beta}(x)$ поле в пространстве Минковского со значениями в спинорном модуле - более коротко - *спинорное поле*. Произвольный параметр m имеет смысл массы. Этим уравнением описываются все поля материи кроме поля Хиггса (спин 0): электрон, мюон, нейтрино, кварки и т.д.

Фундаментальным свойством этого уравнения является его Пуанкаре-инвариантность. Пусть $g \in ISO(3,1)$ и $x'^a := g^a(x) = A^a{}_b x^b + a^a$. Напомним результат действия g на скалярное поле $\phi(x)$: преобразованное поле в преобразованной точке равно исходному полю в исходной точке, т.е. $\phi'(x') = \phi(x)$. Это эквивалентно закону преобразования $\phi'(x) = \phi(g^{-1}(x))$.

Пусть теперь $\chi^{\hat\alpha}(x)$ принимает значения в любом модуле алгебры Ли группы Лоренца (индекс $\hat\alpha$). Тогда закон преобразования имеет вид

$$\chi'^{\hat\alpha}(x) = T^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta}\chi^{\hat\beta}(g^{-1}(x))\,, \tag{7.10}$$

где $T^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta}$ реализует представление лоренцевой подгруппы группы Пуанкаре.

Напоминание: группа трансляций образует нормальный делитель группы Пуанкаре, а группа Лоренца реализует фактор-группу $iso(d-1,1)/T^d$. Поэтому всякий $o(d-1,1)$-модуль образует и $iso(d-1,1)$-модуль при тривиальном действии T^d.

Задача 7.9. Продумать.

Замечание: действие группового элемента g на аргумент x аналогично действию на правом модуле, а действие $T^{\hat\alpha}{}_{\hat\beta}\chi^{\hat\beta}$ - на левом. Поэтому аргумент χ содержит g^{-1} а не g.

Задача 7.10. Продумать.

Трансляционная инвариантность уравнения Дирака очевидна, так как оно не содержит явной зависимости от x.

Задача 7.11. Доказать.

Остается проверить инвариантность относительно лоренцевых преобразований. На практике, надо доказать, что если некоторое $\chi^{\hat\alpha}(x)$ решает уравнение Дирака, то и $\chi'^{\hat\alpha}(x)$ (7.10) его решает.

Задача 7.12. Доказать, что это следует из соотношения (7.11), которое в спинорном представлении имеет вид

$$[L_{nm}\,, \gamma_l] = \eta_{lm}\gamma_n - \eta_{ln}\gamma_m\,. \tag{7.11}$$

Задача 7.13. Доказать, что всякое решение уравнения Дирака является решением уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$\left(\Box + m^2\right)\psi_{\hat\beta}(x) = 0\,.$$

Напомню, что, как объяснялось в прошлом семестре, это свойство является необходимым для элементарной частицы, описываемой неприводимым Пуанкаре-модулем.