Лекция 1.
2 курс, Осенний семестр, 12 сентября 2019.

1.1 Напоминание

В прошлом семестре мы изучили основные понятия теории групп, линейной алгебры и алгебр Ли. Изучили ортогональные группы, группы нерелятивистских симметрий (группа Галилея) и группу релятивистских симметрий (группа Пуанкаре).

Кроме того изучили простейшее релятивистское уравнение - уравнение Клейна-Гордона-Фока для скалярного поля $\phi(x)$

$$\Box\phi(x) + m^2\phi(x) = 0\,. \tag{1.1}$$

Убедились, что решения этого уравнения образуют модуль алгебры Пуанкаре. Этот модуль оказывается неприводимым и описывает частицу спина 0 и массы m. Осознание этого факта переводит общий вопрос о классификации возможных типов элементарных частиц на язык теории представлений группы (алгебры) Пуанкаре. Впервые это было осознано Вигнером, который и проклассифицировал все типы (хороших) элементарных частиц. В этой лекции я обрисую идею вигнеровского подхода, опирающегося исключительно на определение алгебры Пуанкаре.

Напомню, что алгебра Пуанкаре порождается инфинитезимальными трансляциями P_a и Лоренцевыми вращениями L_{ab}, удовлетворяющими соотношениям

$$[P_n\,, P_m] = 0\,, \tag{1.2}$$

$$[L_{nm}\,, P_l] = -i(\eta_{ml}P_n - \eta_{nl}P_m)\,, \tag{1.3}$$

$$[L_{nm}\,, L_{kl}] = -i(\eta_{mk}L_{nl} - \eta_{nk}L_{ml} - \eta_{ml}L_{nk} + \eta_{nl}L_{mk})\,. \tag{1.4}$$

Я здесь немного поменял нормировку генераторов, поделив их на мнимую единицу для будущего удобства, так что теперь их реализация дифференциальными операторами (для случая скалярного поля) имеет вид

$$P_n = -i\frac{\partial}{\partial x^n}\,, \qquad L_{nm} = -i\left(x_n\frac{\partial}{\partial x^m} - x_m\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\,. \tag{1.5}$$

Появление мнимой единицы в правой части соотношений алгебры Ли

$$[t_a\,, t_b] = if_{ab}^c t_c \tag{1.6}$$

с вещественными структурными константами f_{ab}^c свидетельствует о том, что генераторы t_a допускают реализацию эрмитовыми операторами.

Задача 1.1. Убедиться

Это удобно тем, что у эрмитовых операторов вещественные собственные значения. Напомню, что операторы трансляций приобретали диагональный вид на гармонических плоских волнах

$$\phi_p(x) := \exp ip_n x^n\,. \tag{1.7}$$

Теперь

$$P_n\phi_p(x) = p_n\phi_p(x)\,. \tag{1.8}$$

1.2 Классификация элементарных частиц по Вигнеру

Пусть пространство V - Пуанкаре-модуль. В случае скалярного поля V- пространство (положительно-частотных) решений уравнения КГФ.

Поскольку $P_n P^n$ оператор Казимира группы Пуанкаре, в соответствии с Леммой Шура, он должен быть пропорционален единичному в неприводимом унитарном представлении

$$P_n P^n V = m^2 V \,, \tag{1.9}$$

где m^2 - число, характеризующее модуль V.

Имеется три различных возможности:
$m^2 > 0$: массивные частицы
$m^2 = 0$: безмассовые частицы
$m^2 < 0$: тахионы.

Физический интерес представляют первые два случая, которыми мы и займемся.

Поскольку операторы P_n коммутируют, их можно диагонализовать одновременно. Пусть V_p - собственное подпространство V с собственными значениями p_n операторов P_n

$$P_n V_p = p_n V_p \,. \tag{1.10}$$

Задача 1.2. Почему важно условие коммутативности P_n?

Задача 1.3. Что такое пространство V_p в случае скалярного поля?

Для представления V с определенным m^2, собственные значения p_n должны удовлетворять условию

$$p_n p^n = m^2 \,. \tag{1.11}$$

Это условие называется условием *массовой оболочки.*

В следствие (1.3) под действием преобразований Лоренца p_a преобразуется как вектор

Задача 1.4. Доказать

Как мы проверяли в прошлом семестре, уравнение (1.11) описывает орбиты группы Лоренца. В случаях $m^2 > 0$ и $m^2 = 0$ имеется по две орбиты ортохронной группы Лоренца: с $p^0 > 0$ и $p^0 < 0$, отвечающие положительным и отрицательным частотам.

Кроме того, при $m^2 = 0$ есть еще орбита, состоящая из одной точки $p^n = 0$. Этот случай нам еще пригодится.

Задача 1.5. Убедиться, что в патологическом тахионном случае разделения на положительные и отрицательные частоты не имеет Лоренц-инвариантного смысла.

Это значит, что пространства V_p с разными p_n, принадлежащими одной орбите, переводятся друг в друга лоренцевыми преобразованиями. В результате,

$$V = \oplus_p V_p \,, \qquad p: \quad p_n p^n = m^2 \,. \tag{1.12}$$

Задача 1.6. Что означает это разложение в примере скалярного поля?

Поскольку преобразования Лоренца обратимы, пространства V_p с разными p^n на одной орбите группы Лоренца изоморфны. В результате, для того чтобы изучить модуль V, остается изучить структуру пространства V_p для одного из p^n на орбите $p^2 = m^2$.

Прежде чем переходить к формальному анализу следует понять, о чем идет речь на языке формул. В общем случае, вместо скалярного поля, релятивистские частицы описываются функциями $\phi^A(x)$ с некоторым индексом A. Все они удовлетворяют уравнению КГФ с некоторой массой. Разложение Фурье есть разложение по собственным подпространствам V_p. Индекс A определяет структуру пространства V_p при фиксированном p^n.

Задача состоит в том, чтобы найти возможную структуру V_p при фиксированном p. Поскольку V_p с различными p связаны преобразованиями Лоренца, достаточно проанализировать V_p для некоторого одного *стандартного* p_n, удовлетворяющего (1.11).

1.2.1 Массивный случай

Рассмотрим вначале массивный случай. В этом случае наиболее удобный выбор имеет вид

$$p_n = (m, 0, \dots 0)\,. \tag{1.13}$$

Этот выбор обычно называется переходом в систему покоя, так как он отвечает ситуации, когда скорости, ассоциированные с p_n, равны нулю.

Структура V_p при заданном p_n определяется теми преобразованиями Лоренца, которые оставляют выбранный p_n инвариантным. Группа таких преобразований называется *Малой Группой Вигнера*, а ее алгебра Ли - *Малой Алгеброй Вигнера*.

Задача 1.7. Найти малую группу Вигнера в массивном случае $m^2 > 0$.

Очевидно, малая группа Вигнера в массивном случае есть $O(d-1)$ для частицы в d-мерном пространстве-времени. В привычном нам случае $d = 4$ это группа $O(3)$.

Таким образом классификация разных типов элементарных частиц, сводящаяся к классификации унитарных представлений группы Пуанкаре, свелась к классификации унитарных представлений малой группы Вигнера, которая для случая массивных частиц есть $O(d-1)$. Иными словами, различным представлениям алгебры Пуанкаре отвечают различные (попарно неизоморфные) $o(d-1)$-модули.

Я не буду останавливаться на формальном доказательстве этого факта, который следует из конструктивного описания уравнений движения различных типов частиц в духе уравнений массивного поля спина 1, которые мы обсудим ниже.

Задача 1.8. Какие $O(n)$-модули вы знаете?

Первый нетривиальный пример дается векторным $o(d-1)$-модулем. В этом случае, элементы V_p являются $o(d-1)$-векторами. Обозначим их $\widetilde{A}_i(p)$ с $i = 1, \dots, d-1$. Этот тип модулей ассоциируется с простейшей диаграммой Юнга $\square$.

Аналогично случаю скалярного поля $\widetilde{A}_i(p)$ отождествляется с Фурье компонентами релятивистского векторного поля $A_n(x)$. Как любое неприводимое векторное поле $A_n(x)$ должно удовлетворять уравнению КГФ

$$(\square + m^2)A_n(x) = 0\,, \tag{1.14}$$

ограничивающему импульс условием (1.11).

Ясно, что решения (1.14) образуют Пуанкаре - модуль.

Задача 1.9. Неприводим ли этот модуль?

Задача 1.10. Какое инвариантное подпространство можно выделить?

Подмодуль выделяется наложением следующего *условия Лоренца*

$$\partial_n A^n(x) = 0\,. \tag{1.15}$$

Задача 1.11. Убедиться, что это условие Пуанкаре инвариантно и выделяет подмодуль.

Убедимся теперь, что таким образом как раз получается описание частицы спина 1, отвечающей векторному представлению малой группы Вигнера. Действительно, переходя к Фурье компонентам

$$A^n(x) = \int d^d p \tilde{A}^n(p) \exp ix^n p_n\,, \tag{1.16}$$

убеждаемся, что уравнение (1.14) ограничивает импульсы p^n Лоренц-инвариантным условием *массовой оболочки* (1.11).

В системе покоя, где только p_0–компонента отлична от нуля, условие Лоренца дает $\widetilde{A}_0(p) = 0$ оставляя неограниченными пространственные компоненты $\widetilde{A}_i(p)$. Вектора $\widetilde{A}_i(p)$ как раз и порождают линейное пространство V_p, образующее векторный $o(d-1)$-модуль.

Замечу, что массивные поля спина 1 играют важную роль в современной теории элементарных частиц. Так описываются векторные бозоны $W^\pm$ и Z.

Общее правило построения уравнений массивных частиц, впервые примененное Дираком в 30х годах прошлого века, таково: берите то или иное тензорное поле $A^{n_1,n_2,\cdots}$, подчините его уравнению КГФ с той или иной массой $m^2 > 0$ и наложите на него максимально возможное число Пуанкаре-инвариантных условий типа определенной симметрии по тензорным индексам, бесследовости и всевозможные условия Лоренца.

Проиллюстрируем это на примере массивного поля спина 2. Соответствующие релятивистские уравнения накладываются на тензорное поле $\phi^{nm}(x)$, которое удовлетворяет уравнению КГФ

$$(\Box + m^2)\phi^{nm}(x) = 0\,, \tag{1.17}$$

а также условию симметрии

$$\phi^{nm} = \phi^{mn} \tag{1.18}$$

бесследовости

$$\phi^{nm}\eta_{nm} = 0\,, \tag{1.19}$$

и поперечности

$$\partial_n \phi^{nm} = 0\,. \tag{1.20}$$

В системе покоя последнее уравнение дает условие $\phi^{0n} = 0$. Это означает, что остаются ненулевыми только пространственные компоненты ϕ^{ij} $i, j = 1, \ldots n-1$, подчиненные условиям симметрии и бесследовости

$$\phi^{ij} = \phi^{ji}\,, \qquad \phi^{ij}\delta_{ij} = 0\,. \tag{1.21}$$

Такой тензор действительно образует неприводимое представление малой группы Вигнера $O(d-1)$.

Что значит рассмотреть тензор определенной симметрии вопрос не такой простой - ответ на него дается на языке диаграмм Юнга. Этот же язык дает ответ на вопрос о классификации тензорных представлений $o(n)$. Мы позже к нему вернемся.

Кроме того, оказывается, что существуют спинорные представления $o(n)$, которые существенно отличаются от тензорных и которые в физику также ввел Дирак. Их построение связано с очень важной и содержательной конструкцией алгебр Клиффорда, к изучению которых мы перейдем сразу после обсуждения частиц с нулевой массой покоя.

Лекция 2.
2 курс, Осенний семестр, 19 сентября 2019.

2.3 Конструкция Вигнера: безмассовый случай

Значительная часть лекции в аудитории была связана с ответами на вопросы, касавшимися преобразования Фурье. Поэтому содержательная часть оказалась достаточно короткой.

В безмассовом случае задача состоит в том, чтобы проанализировать V_p для светоподобного импульса p_n удовлетворяющего $p_n p_m \eta^{nm} = 0$. Достаточно проанализировать случай любого (ненулевого) светоподобного вектора p_n, который можно выбрать например в виде

$$\mathbf{p}_n = \omega(1, 1, \ldots 0)\,, \tag{2.1}$$

где ω - некоторое ненулевое число.

Мы должны найти малую алгебру Вигнера l_p как подалгебру Лоренца, оставляющую инвариантным $\mathbf{p}_n$. Очевидно, l_p содержит алгебру $o(d-2)$, действующую на нулевые компоненты $\mathbf{p}_n$. Ее генераторы:

$$L_{\mathbf{ij}}\,, \qquad \mathbf{i}, \mathbf{j} = 2, \ldots d-1\,. \tag{2.2}$$

Однако это не все. Действительно, следующие комбинации лоренцевых генераторов также оставляют $\mathbf{p}_n$ инвариантными

$$L_{+\mathbf{i}} := L_{0\mathbf{i}} + L_{1\mathbf{i}} \tag{2.3}$$

Задача 2.1. Убедиться . **Подсказка:** используйте, что

$$\eta_{++} = \frac{\partial x^m}{\partial x^+}\frac{\partial x^n}{\partial x^+}\eta_{mn} = 0\,, \qquad x^+ := x^0 + x^1\,.$$

Генераторы $L_{+\mathbf{i}}$ совместно с $L_{\mathbf{i}j}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[L_{\mathbf{i}j}\,, L_{+\mathbf{k}}] = -i(\delta_{jk}L_{+\mathbf{i}} - \delta_{ik}L_{+\mathbf{j}})\,. \tag{2.4}$$

$$[L_{+\mathbf{i}}\,, L_{+\mathbf{j}}] = 0\,. \tag{2.5}$$

Задача 2.2. Убедиться, что это алгебра Ли $iso(d-2)$ движений $d-2$-мерного эвклидового пространства.

В этой интерпретации $L_{+\mathbf{i}}$ играют роль генераторов трансляций.

Таким образом, в безмассовом случае V_p должно образовывать неприводимый унитарный модуль $iso(d-2)$. Имеется однако математическая теорема, утверждающая, что унитарные представления $iso(d-2)$ либо бесконечномерны либо на них операторы сдвигов действуют тривиально. Вигнер рассмотрел оба случая. Первый тип представлений называется представлениями бесконечного спина, а второй представлениями конечного спина. Последний описывает безмассовые поля с конечным числом компонент и представляет наибольший интерес, хотя в последние несколько лет поля бесконечного спина стали активно обсуждаться в литературе.

Задача 2.3. Убедитесь, что если генераторы $L_{+\mathbf{i}}$, играющие роль генераторов трансляций, действуют нетривиально, то представление бесконечномерно.

Таким образом, ограничиваясь случаем конечно-компонентных полей, мы приходим к выводу, что различные типы безмассовых полей классифицируются по различным типам $o(d-2)$-модулей. Несколько огрубляя терминологию, $o(d-2)$ часто называют *безмассовой алгеброй Вигнера.*

Рассмотрим пример безмассового поля спина 1 - электродинамика Максвелла. Уравнения на безмассовое векторное поле A_n имеют вид аналогичный массивному случаю

$$\Box A^n = 0\,, \qquad \partial_n A^n = 0\,. \tag{2.6}$$

Но есть и существенное отличие. Если в массивном случае эти уравнения описывали неприводимое представление алгебры Пуанкаре, то в безмассовом это не так.

Пространство решений $D_{0,1}$ содержит подмодуль $D_{0,0}$ изоморфный пространству решений безмассового скалярного поля. Действительно. Пусть $\phi(x)$ удовлетворяет безмассовому уравнению КГФ

$$\Box\phi(x) = 0\,. \tag{2.7}$$

Тогда векторное поле вида

$$A_n(x) = \partial_n\phi(x) \tag{2.8}$$

удовлетворяет уравнениям (2.6).

Задача 2.4. Убедиться.

Ясно, что поля такого вида образуют Пуанкаре-модуль.

Неприводимым модулем является фактор-модуль $D_{0,1}/D_{0,0}$. Иными словами, решения уравнения (2.6), отличающиеся на элементы $D_{0,0}$, рассматриваются как эквивалентные

$$A_n(x) \simeq A_n(x) + \partial_n\phi(x)\,, \qquad \Box\phi(x) = 0\,. \tag{2.9}$$

Такая эквивалентность присуща безмассовым полям - например полям Фронсдала из задания на лето - и называется калибровочной инвариантностью.

При чем же здесь малая группа $o(d-2)$? Рассмотрим Фурье-образ $\tilde{A}_n(p)$. Пусть импульс имеет вид (2.1). Тогда условие поперечности дает

$$A_- := A_0(p) - A_1(p) = 0\,. \tag{2.10}$$

Задача 2.5. Проверить

В результате, остаются следующие компоненты поля A_n

$$A_+ := A_0(p) + A_1(p)\,, \qquad A_{\mathbf{i}}\,, \qquad \mathbf{i} = 1, \ldots d-2\,. \tag{2.11}$$

Но компонента A_+ является чисто калибровочной и должна быть отфакторизована (т.е. не описывает физических степеней свободы). В результате, физические степени свободы описываются векторными компонентами A_i, которые как раз и реализуют векторное представление безмассовой алгебры $o(d-2)$.

Нетривиальные компоненты безмассовых полей лежат в плоскости ортогональной направлению движения (в рассматриваемом случае (2.1) это x_1).

В случае четырехмерного пространства, это означает, что безмассовое поле спина один (поле Максвелла) описывает две поляризации. Определенному выбору поляризации, отвечает поляризованный свет. Отмечу, что массивное поле спина 1 имеет три поляризации - две поперечных и одну продольную.

Задача 2.6. Почему безмассовые поля не имеют продольных поляризаций?

Другие безмассовые поля описываются аналогично. Уравнения совпадают с массивными при $m = 0$, но за счет калибровочных симметрий часть степеней свободы пропадает в соответствии с классификацией Вигнера.

Задача 2.7. Проанализировать случай безмассового поля спина 2 (гравитона) и определить число независимых поляризаций гравитационного поля.

Таким образом, элементарные частицы классифицируются по представлениям ортогональных групп (алгебр). Мы знакомы с векторным представлением $O(n)$. Из него с помощью конструкции тензорного произведения строятся тензорные представления. (Как именно это делается мы обсудим в деталях позднее.) Но оказывается, что не все $O(n)$-модули строятся таким образом. Есть еще спинорные модули, в терминах которых описываются частицы полуцелых спинов, начиная со спина $1/2$. К этому классу элементарных частиц относятся электрон, мюон, нейтрино, кварки и другие частицы. Чтобы понять как описываются такие частицы нам придется познакомиться с понятием алгебры Клиффорда, которая является важнейшим математическим объектом с большим числом приложений как в физике, так и математике.

Лекция 3.
2 курс, Осенний семестр, 26 сентября 2019.

3.4 Алгебра Клиффорда

Алгеброй Клиффорда называется ассоциативная алгебра $\mathcal{C}l_d(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$) с образующими ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots d$, удовлетворяющими соотношениям

$$\{\phi_n \,, \phi_m\} = 2\eta_{nm} I \,. \tag{3.1}$$

Здесь I - единичный элемент алгебры, а фигурные скобки обозначают антикоммутатор

$$\{a \,, b\} := ab + ba \tag{3.2}$$

по отношению к ассоциативному произведению в алгебре Клиффорда, которое никаким специальным символом не обозначается. $\eta_{nm} = \eta_{mn}$ - невырожденная симметричная матрица размерности $d \times d$. (Строго говоря, в общем определении η_{nm} может быть вырожденной, но нас будет интересовать невырожденный случай.)

Термин *образующие* означает, что алгебра $\mathcal{C}l_d(\mathbb{K})$ состоит из всевозможных полиномов, построенных из ϕ_n, подчиненных соотношениям (3.1). Если вспомнить понятие универсальной обертывающей $U(l)$ алгебры Ли l, то алгебру Клиффорда можно понимать как универсальную обертывающую соотношений (3.1).

В качестве базиса алгебры Клиффорда можно выбрать полностью антисимметризованные произведения

$$\phi_{[n_1} \ldots \phi_{n_k]} \,, \qquad k = 0, 1, \ldots d \tag{3.3}$$

Задача 3.1. Доказать.

Для доказательства надо использовать, что, в силу (2.1), симметризация по любой паре индексов понижает степень полинома, что позволяет вести индукцию по k.

Пример.

$$\phi_n \phi_m = \frac{1}{2}(\phi_n \phi_m + \phi_m \phi_n) + \frac{1}{2}(\phi_n \phi_m - \phi_m \phi_n) \,. \tag{3.4}$$

Используя определяющие соотношения алгебры Клиффорда (3.1), это дает

$$\phi_n \phi_m = \eta_{nm} I + \phi_{[n} \phi_{m]} \,, \qquad \phi_{[n} \phi_{m]} := \frac{1}{2}(\phi_n \phi_m - \phi_m \phi_n) \,. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что первый член дает вклад в полиномы младшей (в данном случае нулевой) степени.

В результате, общий элемент может быть записан в виде

$$a = \sum_{i=0}^{d} a_i \,, \qquad a_i := a^{n_1 \ldots n_i} \phi_{n_1} \ldots \phi_{n_i} \,, \qquad a_0 := aI \,, \tag{3.6}$$

где коэффициенты $a^{n_1 \cdots n_i}$ полностью антисимметричны

$$a^{\cdots n_q \cdots n_p \cdots} = -a^{\cdots n_p \cdots n_q \cdots} \tag{3.7}$$

Задача 3.2. Почему суммирование конечно?
Задача 3.3. Найти число компонент антисимметричного тензора $a^{n_1 \cdots n_p}$.

$$N_p = \frac{d!}{p!(d-p)!} \tag{3.8}$$

Задача 3.4. Какова размерность алгебры Клиффорда?

$$\dim \mathcal{C}l_d = \sum_{p=0}^{d} N_p = 2^d\,. \tag{3.9}$$

Итак, алгебра Клиффорда - конечномерная ассоциативная алгебра с единицей

$$\dim \mathcal{C}l_d = 2^d\,. \tag{3.10}$$

Какие конечномерные ассоциативные алгебры мы знаем?

Задача 3.5. Какова размерность алгебры матриц Mat_n?

$$\dim Mat_n = n^2\,. \tag{3.11}$$

Задача 3.6. Не является ли алгебра Клиффорда матричной алгеброй? Какому условию должно удовлетворять для этого d?

Оказывается (мы в этом убедимся), что

$$\mathcal{C}l_{2M} = Mat_{2^M}\,, \tag{3.12}$$

а

$$\mathcal{C}l_{2M+1} = Mat_{2^M} \oplus Mat_{2^M}\,. \tag{3.13}$$

Отмечу, что это совсем не случайно получилось, а является следствием теоремы Веддерберна, утверждающей, что любая простая конечномерная ассоциативная алгебра A над полем комплексных чисел является матричной алгеброй. Мы увидим, что алгебра $\mathcal{C}l_{2M}$ - простая, а алгебра $\mathcal{C}l_{2M+1}$ - нет в соответствии с (3.13).

Еще одна любопытная матрешечная реализация $\mathcal{C}l_{2M}$ такова: это алгебра матриц 2x2, элементы которых являются матрицами 2x2 и так далее M раз.

В связи с этим

Задача 3.7. Рассмотрим алгебру матриц $n \times n$, элементы которой сами являются матрицами $m \times m$. Убедиться, что такие матрицы порождают ассоциативную алгебру A. Найти ее размерность и реализовать как матричную алгебру.

На самом деле, речь здесь идет о конструкции тензорного произведения ассоциативных алгебр:

$$Mat_{nm} = Mat_n \otimes Mat_m\,. \tag{3.14}$$

Я вернусь к конструкции тензорного произведения после завершения рассказа про спиноры.

Рассмотрим максимальный элемент

$$\Gamma := i^{\frac{d(d-1)}{2}} \sqrt{det|\eta|}\phi_0\phi_1 \dots \phi_{d-1} \,. \tag{3.15}$$

Из (3.1) следует, что

$$\Gamma\phi_n = (-1)^{d-1}\phi_n\Gamma \tag{3.16}$$

и

$$\Gamma^2 = I \,. \tag{3.17}$$

Задача 3.8. Убедиться

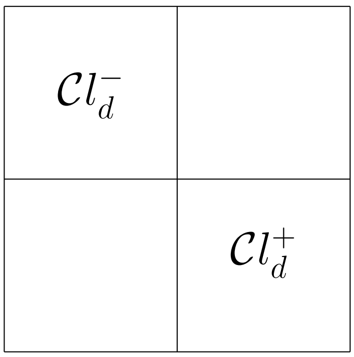
Свойство (3.16) означает, что для нечетных d элемент Γ коммутирует с ϕ_n, а значит и с любым другим элементом алгебры Клиффорда. Иными словами, Γ является *центральным элементом* при нечетных d. Свойство (3.17) позволяет нам ввести проекторы

$$P^{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm \Gamma) \, : \qquad P^{\pm}P^{\pm} = P^{\pm} \,, \qquad P^{\pm}P^{\mp} = 0 \,, \qquad P^{+} + P^{-} = I \,. \tag{3.18}$$

В свою очередь, это позволяет разложить алгебру Клиффорда $\mathcal{C}l$ в прямую сумму двух подалгебр

$$\mathcal{C}l_d = \mathcal{C}l_d^{+} \oplus \mathcal{C}l_d^{-} \,, \qquad \mathcal{C}l_d^{\pm} := P^{\pm}\mathcal{C}l_d \,. \tag{3.19}$$

Ортогональность и центральность проекторов означает, что $\phi^+\phi^- = 0$ для любых $\phi^+ \in \mathcal{C}l_d^+$ и $\phi^- \in \mathcal{C}l_d^-$. Это означает, что $\mathcal{C}l_d$ имеет блок-диагональную структуру с двумя блоками, ассоциированными с $\mathcal{C}l_d^+$ и $\mathcal{C}l_d^-$.



Задача 3.9. Доказать, что

$$\mathcal{C}l_d^{\pm} \cong \mathcal{C}l_{d-1} \,, \qquad d \quad \text{нечетно} \,. \tag{3.20}$$

Этот результат сводит анализ алгебр Клиффордф с нечетными d к четному.

Задача 3.10. В качестве упражнений проверить, что
$\mathcal{C}l_0(\mathbb{C})$ - алгебра чисел, т.е. $\mathbb{C}$;

$\mathcal{C}l_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$;
$\mathcal{C}l_2(\mathbb{C})$ с $\eta_{nm} = \delta_{nm}$ - алгебра матриц 2×2.
$\mathcal{C}l_3(\mathbb{C}) \cong \mathcal{C}l_2(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{C}l_2(\mathbb{C})$.

3.5 Алгебра Клиффорда как $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра

Алгебра A называется $\mathbb{Z}_2$-градуированной, если $A = A^+ \oplus A^-$ как линейное пространство и выполнены следующие условия

$$A^+A^+ \subset A^+\,, \qquad A^-A^- \subset A^+\,, \tag{3.21}$$

$$A^+A^- \subset A^-\,, \qquad A^-A^+ \subset A^-\,. \tag{3.22}$$

Иными словами закон композиции ведет себя как четные и нечетные числа по сложению. Элементы A^+ и A^- называются четными и нечетными, соответственно.

Задача 3.11. Найти $\mathbb{Z}_2$ градуировку алгебры Клиффорда

Задача 3.12. Проверить, что можно считать, что четные и нечетные элементы задают $\mathbb{Z}_2$ градуировку алгебры Клиффорда

$$f(\phi) \subset \mathcal{C}l_n^+ : \qquad f(-\phi) = f(\phi) \tag{3.23}$$

$$f(\phi) \subset \mathcal{C}l_n^- : \qquad f(-\phi) = -f(\phi) \tag{3.24}$$

Задача 3.13. Убедиться, что это определение нечувствительно к выбору порядка сомножителей в алгебре Клиффорда

Лекция 4.
2 курс, Осенний семестр, 10 октября 2019.
(3 октября Анатолий Корибут разбирал со студентами задачи на лето.)

4.6 Дифференцирование в алгебре

Фундаментальный факт, обсуждавшийся в Лекции от 2 мая, состоит в том, что коммутатор в ассоциативной алгебре является ее *дифференцированием*, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница

$$[a\,,bc] = [a\,,b]c + b[a\,,c]\,. \tag{4.1}$$

Задача 4.1. Проверить тем, кто забыл.

Пусть теперь A - $\mathbb{Z}_2$ градуированная алгебра. По определению *однородные элементы* обладают определенной четностью, т.е. принадлежат либо A^+ либо A^-. Соответственно, таким элементам a сопоставляется четность

$$\pi(a) = 0: \qquad a \in A^+\ , \qquad \pi(a) = 1: \qquad a \in A^-\,. \tag{4.2}$$

Градуированным коммутатором или *суперкоммутатором* называется следующая комбинация

$$[a\,,b]_\pm := ab - (-1)^{\pi(a)\pi(b)} ba\,. \tag{4.3}$$

Задача 4.2. Проверить, что если хотя бы один из элементов a и b является четным, то суперкоммутатор сводится к коммутатору, а если оба нечетные - то к антикоммутатору.

Суперкоммутатор порождает нечетное дифференцирование (супердифференцирование), удовлетворяющее градуированному правилу Лейбница.

$$[a\,,bc]_\pm = [a\,,b]_\pm c + (-1)^{\pi(a)\pi(b)} b[a\,,c]\,. \tag{4.4}$$

Задача 4.3. Проверить

В частном случае, когда все a, b, c нечетны, это дает

$$[a\,,bc] = \{a\,,b\}c - b\{a\,,c\}\,. \tag{4.5}$$

Задача 4.4. Проверить

Как обсуждалось в лекции от 2 мая, в общем случае, дифференцированием алгебры A (ассоциативной или алгебры Ли) называется любая линейная операция D, удовлетворяющая правилу Лейбница,

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)\,, \tag{4.6}$$

которое в случае алгебр Ли имеет вид

$$D([a\,,b]) = [D(a)\,,b] + [a\,,D(b)]\,. \tag{4.7}$$

Дифференцирования $D_a(b) := [a\,, b]$, порожденные коммутаторами с элементами $a \in A$ называются *внутренними.* Дифференцирования D, которые не порождены коммутаторами, называются *внешними.*

Важные свойства дифференцирований, обсуждавшиеся в прошлом семестре:

Дифференцирования образуют алгебру Ли $D(A)$ по отношению к их коммутированию

$$D_{1,2}(b) := D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b))\,. \tag{4.8}$$

Внутренние дифференцирования $D^{in}(A)$ образуют идеал $D(A)$.

Таким образом, внешние дифференцирования можно отождествить с элементами фактор-алгебры $D(A)/D^{in}(A)$.

Задача 4.5. Продумать

Задача 4.6. Распространить введенные выше определения на случай суперкоммутаторов, используя следующее понятие супералгебры Ли.

Определение.

Алгебра S называется супералгеброй Ли, если она $\mathbb{Z}_2$-градуирована и для однородных элементов, обладающих определенной четностью, ее закон композиции $[a\,, b]_\pm$ удовлетворяет следующим условиям симметрии

$$[a\,, b]_\pm = (-1)^{\pi(a)\pi(b)}[b\,, a]_\pm$$

и тождеству Якоби

$$(-1)^{\pi(a)\pi(c)}[a\,, [b\,, c]_\pm]_\pm + (-1)^{\pi(a)\pi(b)}[b\,, [c\,, a]_\pm]_\pm + (-1)^{\pi(b)\pi(c)}[c\,, [a\,, b]_\pm]_\pm = 0\,.$$

Задача 4.7. Проверить, что тождество Якоби становится тождеством, если суперлиевское произведение $[a\,, b]_\pm$ реализовано как суперкоммутатор (4.3).

Дифференцирования могут быть четными и нечетными.

Дифференцирование D - четно, если $\pi(D(a)) = \pi(a)$ и нечетно, если $\pi(D(a)) = 1-\pi(a)$, т.е. четные дифференцирования не меняют четность элемента, на которой они действуют, а нечетные - меняют. Иными словами,

$$\pi(D(a)) = \pi(D) + \pi(a) \qquad \text{по модулю 2}$$

Задача 4.8. Проверить, что супердифференцирования образуют супералгебру Ли по отношению к так введенной четности.

4.7 Связь с группой Лоренца

Почему же алгебра Клиффорда так важна для релятивистской физики? Потому что ее представления порождают представления (псевдо)ортогональных алгебр - спинорные представления. Это следует из того факта, что элементы

$$L_{nm} := -\frac{i}{4}[\phi_n\,, \phi_m] \tag{4.9}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $o(d)$ или $o(d-1,1)$ при η_{nm} с сигнатурой Минковского.

В этом легче всего убедиться, используя правила (супер)дифференцирования (супер) коммутаторов. Сначала получаем с помощью (4.5), используя $\mathbb{Z}_2$ градуировку алгебры Клиффорда,

$$[\phi_l\,,L_{nm}]=-\frac{i}{4}(\{\phi_l\,,\phi_n\}\phi_m-\phi_n\{\phi_l\,,\phi_m\})-n\leftrightarrow m=-i(\eta_{ln}\phi_m-\eta_{lm}\phi_n)\,. \tag{4.10}$$

Задача 4.9. Доказать

После этого, используя, что коммутатор является дифференцированием, получаем

$$[L_{nm}\,,L_{kl}]=-i(\eta_{mk}L_{nl}-\eta_{nk}L_{ml}-\eta_{ml}L_{nk}+\eta_{nl}L_{mk})\,. \tag{4.11}$$

Задача 4.10. Доказать

Таким образом, всякое представление алгебры Клиффорда порождает представление алгебры Ли Лоренца. Построением представлений алгебры Клиффорда мы и займемся. Так возникают спиноры.

4.8 $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры

Алгебра A называется $\mathbb{Z}$-градуированной, если

$$A=\oplus_{i=-\infty}^{\infty}A_i \tag{4.12}$$

как линейное пространство и выполнено условие

$$A_iA_j\subset A_{i+j}\,. \tag{4.13}$$

Важное замечание: алгебра A может быть конечномерной. В этом случае лишь конечное число подпространств A_i не пусто.

Задача 4.11. Доказать, что $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра является $\mathbb{Z}_2$-градуированной.

Всякая $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра A содержит три естественных подалгебры A_+, A_0 и A_-, состоящие, соответственно, из элементов с положительной, нулевой и отрицательной градуировкой.

Задача 4.12. Доказать

4.8.1 Алгебра Клиффорда

Оказывается, что алгебра Клиффорда $\mathbb{Z}$-градуирована. Чтобы это увидеть надо перейти к другому базису. Именно, в $\mathcal{C}l_d$ с четным d можно выбрать образующие ψ_a^- и ψ^{+a} с $a=1,\ldots,d/2$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\{\psi_a^-\,,\psi^{+b}\}=\delta_a^b\,,\qquad\{\psi_a^-\,,\psi_b^-\}=0\,,\qquad\{\psi^{+a}\,,\psi^{+b}\}=0\,. \tag{4.14}$$

Задача 4.13. Убедиться.

Подсказка: Явно постройте $\psi_a^{\pm}$ из ϕ_n в случаях алгебр Клиффорда с двумя образующими с метрикой Минковского (сигнатура (1,-1)) и Евклида (сигнатура (1,1)).

В терминах образующих $\psi_a^{\pm}$ элемент

$$\Psi = \psi^+_{a_1} \dots \psi^+_{a_{l_+}} \psi^-_{a_1} \dots \psi^-_{a_{l_-}} \tag{4.15}$$

наделяется $\mathbb{Z}$-градуировкой

$$\deg\Psi := l_+ - l_- \,. \tag{4.16}$$

Задача 4.14. Доказать, что это правило задает $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Клиффорда.

4.8.2 Алгебра матриц

Пусть $a^i{}_j \in Mat_n(\mathbb{C})$ элемент алгебры $n \times n$ матриц с законом композиции

$$(ab)^i{}_j = a^i{}_k b^k{}_j \,, \qquad i, j, k = 1, \dots n \,.$$

(По повторяющимся индексам идет суммирование.)

Задача 4.15. Проверить, что матричная алгебра допускает следующую $\mathbb{Z}$-градуировку:

$$\mathrm{Deg}\, a^i{}_j := i - j \,,$$

т.е., что $\mathrm{Deg}\, ab = \mathrm{Deg}\, a + \mathrm{Deg}\, b$.

Задача 4.16. Убедиться, что элементы с положительной, отрицательной и нулевой градуировкой описывают верхние треугольные, нижние треугольные и диагональные матрицы, соответственно.

Задача 4.17. Доказать, что верхние треугольные матрицы (с диагональю или без) образуют подалгебру алгебры матриц.

Лекция 5.
2 курс, Осенний семестр, 17 октября 2019.

5.9 Левые и правые модули

Прежде чем построить спинорный модуль алгебры Клиффорда рассмотрим общий случай $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры. Все равно какой - алгебры Ли или ассоциативной.

В случае ассоциативных алгебр различают левые и правые модули. Левый модуль определяется "естественным образом"

$$ab(v) = a(b(v)) \quad \forall a, b \in A \quad v \in V\,. \tag{5.1}$$

Левым он называется потому, что при таком определении a стоит слева от v.

Правый модуль получается, если элементы алгебры стояли бы справа от v. Эквивалентно, в этом случае можно потребовать

$$ab(v) = b(a(v)) \quad \forall a, b \in A \quad v \in V\,. \tag{5.2}$$

Задача 5.1. Убедиться, что это модуль.

Задача 5.2. В случае алгебры матриц какие левые и правые модули вам известны?

Пусть A-ассоциативная алгебра с произведением $a \circ b$. Определим *транспонированную алгебру* $\tilde{A}$ с произведением $\tilde{\circ}$ таким, что как линейное пространство она совпадает с A, а произведение имеет вид.

$$a \tilde{\circ} b := b \circ a\,. \tag{5.3}$$

Задача 5.3. Доказать, что $\tilde{A}$ - ассоциативная алгебра.

Задача 5.4. Убедиться, что $\tilde{\tilde{A}} = A$.

Задача 5.5. Убедиться, что левые модули A совпадают с правыми модулями $\tilde{A}$ и наоборот.

Это простое наблюдение имеет важное следствие. Если алгебра A изоморфна своей транспонированной $\tilde{A}$, то ее левые и правые модули изоморфны.

В применении к алгебре Клиффорда, эта простая лемма имеет важное и не вполне тривиальное следствие, что существует матрица зарядового сопряжения (с точки зрения физики эта матрица связывает частицы с античастицами).

Задача 5.6. Доказать, что $\widetilde{\mathcal{C}l_d} = \mathcal{C}l_d$

Задача 5.7. Как связаны левые и правые модули алгебр Ли?

Задача 5.8. Какая операция устанавливает изоморфизм левого и правого модулей алгебры матриц?

Операция транспонирования. В общем случае операция транспонирования порождается той или иной билинейной формой и называется антиавтоморфизмом. По определению, *антиавтоморфизмом* алгебры A называется такое взаимно однозначное линейное отображение A в себя $\rho(a) \in A$, такое что, $\forall a, b \in A$

$$\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)\,. \tag{5.4}$$

Напомню, что *автоморфизмом* алгебры A называется такое взаимно однозначное линейное отображение A в себя $\tau(a) \in A$, такое что, $\forall a, b \in A$

$$\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)\,. \tag{5.5}$$

Пусть η_{ij} невырожденная матрица (в действительности, ее лучше называть билинейной формой)

$$\det|\eta_{ij}| \neq 1\,. \tag{5.6}$$

Задача 5.9. Доказать, что отображение

$$\rho({a^i}_j) := \eta^{ik}\eta^{-1}_{lj}{a^l}_k \tag{5.7}$$

порождает антиавтоморфизм алгебры матриц.

Задача 5.10. Доказать, что отображение

$$\tau({a^i}_j) := {U^i}_k {a^k}_l {U^{-1l}}_j \tag{5.8}$$

порождает автоморфизм алгебры матриц для любой обратимой матрицы ${U^i}_j$.

5.9.1 Модули $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр

Пусть V - $\mathbb{Z}$-градуированное линейное пространство

$$V = \oplus_{n=-\infty}^{\infty} V_n\,. \tag{5.9}$$

Модуль V $\mathbb{Z}$-градуирован, если

$$A_n V_m \subset V_{n+m}\,. \tag{5.10}$$

A-модуль V называется *модулем младшего веса*, если все подпространства V_n с $n < 0$ равны нулю, т.е. в этом случае

$$V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n\,. \tag{5.11}$$

Подпространство V_0 часто называется вакуумным.

Рассмотрим подалгебру нулевой градуировки $A_0 \subset A$. Все однородные подпространства $V_n \subset V$ образуют A_0-модули.

Задача 5.11. Доказать

В частности, V_0 образует A_0-модуль. Числа, характеризующие V_0 как A_0-модуль, называются его весами. По определению, V_0 аннигилируется всеми элементами отрицательной градуировки, т.е.

$$A_- V_0 = 0\,. \tag{5.12}$$

Весь модуль V порождается действием $A_+ V_0$

$$V = A_+ V_0\,. \tag{5.13}$$

Важно понимать, что не все различные элементы A_+ порождают линейно независимые элементы V. Действительно, элементы $A_+ \oplus A_0$, которые могут быть представлены в виде $b_+ a_-$ с любыми b_+ и a_- дают ноль при действии на V_0. Поэтому V порождается только теми элементами A_+, которые не могут быть представлены в таком виде.

В качестве достаточно большого домашнего задания предлагаю проанализировать левый модуль алгебры матриц Mat_n, разбив анализ на несколько задач.

Задача 5.12. Доказать, что любой модуль алгебры матриц Mat_n содержит вакуумное однпространство V_0.

Задача 5.13. Найти A_0 и те ее элементы, которые действуют нулем на V_0.

Задача 5.14. Найти как действует элемент A_0, действие которого отлично от нуля.

Задача 5.15. Доказать, что V содержит ровно n однородных подпространств.

Задача 5.16. Доказать, что каждое из однородных подпространств одномерно.

Задача 5.17. Доказать, что возникающий в результате модуль есть ни что иное как столбец.

Эта конструкция весьма общая и применяется к широкому классу модулей алгебр Ли. Важный вопрос о (не)приводимости получающихся модулей переформулируется в этих терминах на языке сингулярных векторов следующим образом. Если модуль V приводим - он содержит подмодуль $V' \subset V$. V' может быть разложен в сумму однородных подпространств

$$V' = \sum_{i=i_0}^{i^{max}} V'_i \tag{5.14}$$

Очевидно, подпространство младшей градуировки V'_{i_0} обладает свойствами вакуума V_0: аннигилируется всеми отрицательными элементами и образует A_0-модуль.

Задача 5.18. Доказать

Вакуумные элементы V_{i_0} называются *сингулярными векторами.* Таким образом, критерием приводимости модуля младшего веса является наличие сингулярнjuj вектора в каком-либо однородном пространстве V_k с $k > 0$. Решение этой задачи поддается вполне конкретным методам, которые применяются в широком круге задач.

5.10 Спиноры

Применим теперь конструкцию модулей младшего веса к алгебре Клиффорда. Прежде всего заметим, что в случае алгебры Клиффорда любой ее модуль содержит некоторый вакуумный вектор.

Задача 5.19. Доказать

Мы обозначим его довольно странно как $|0\rangle$, используя квантово-механические обозначения Дирака. (0 здесь обозначает вакуумное состояние.) Таким образом,

$$\psi_a^- |0\rangle = 0\,.$$

Отсюда следует, что все элементы алгебры Клиффорда, содержащие ψ_a^- справа, действуют на вакуум нулем. Если элемент содержит ψ_a^- в середине $a\psi_a^- b$, то, используя определяющие соотношения алгебры Клиффорда, ψ_a^- можно протащить направо, пока он либо не окажется справа, либо не исчезнет при антикоммутировании с одним из ψ_b^+.

В результате, элементы, обладающие нетривиальным действием на вакуум, исчерпываются всевозможными функциями от ψ_b^+. Соответствующее пространство V называется пространством Фока и обозначается F_d. Таким образом, общий элемент левого модуля F_d алгебры Клиффорда $\mathcal{C}l_d$ с четным d имеет вид

$$|v\rangle \in F_d : \qquad |v\rangle = \sum_{p=0}^{d/2} v_{a_1\dots a_p}\psi^{+a_1}\dots\psi^{+a_p}|0\rangle\,, \tag{5.15}$$

где $v_{a_1\dots a_p}$ - произвольные коэффициенты полностью антисимметричные по индексам $a_1\dots a_p$. Действительно, действие любого элемента алгебры Клиффорда на $v\in F_d$ дает какой-то другой элемент F_d.

Задача 5.20. Доказать

Элементы F_d называются *спинорами.* Вычисление, аналогичное вычислению размерности алгебры Клиффорда, дает

$$\dim\, F_d = 2^{d/2}\,. \tag{5.16}$$

Задача 5.21. Доказать.

F_d является неприводимым левым $\mathcal{C}l_d$–модулем. В этом несложно убедиться, показав, что действуя подходящим элементом алгебры Клиффорда на любой элемент $|v\rangle\in F_d$, его можно отобразить в любой другой элемент $|v'\rangle\in F_d$.

Задача 5.22. Доказать.

Также нетрудно доказать, что всякий неприводимый левый $\mathcal{C}l_d$–модуль изоморфен F_d.

Задача 5.23. Доказать, используя, что каждый левый модуль алгебры Клиффорда содержит вакуумный элемент, аннигилируемый всеми ψ_a^-.

Правый модуль Фока F_d^* определяется аналогично

$$\langle v| \in F_d^* : \qquad \langle v| = \sum_{p=0}^{\frac{d}{2}}\langle 0|v^{a_1\dots a_p}\psi^-_{a_1}\dots\psi^-_{a_p}\,, \qquad \langle 0|\psi^{+a} = 0\,. \tag{5.17}$$

Эти результаты допускают следующую простую и уже известную нам интерпретацию: алгебра Клиффорда $_d$ с четным d изоморфна алгебре $2^{d/2}\times 2^{d/2}$ матриц $Mat_{2^{d/2}}$. Левые и правые модули $\mathcal{C}l_d$ являются пространствами столбцов и строк по отношению к этой матричной алгебре.

Элементы F_d мы будем обозначать $\chi_{\hat\alpha}$, где спинорный индекс $\hat\alpha = 1,\dots 2^{d/2}$ нумерует элементы F_d. Элементы F_d^* обычно обозначаются $\bar\chi^{\hat\alpha}$. Общие элементы $\mathcal{C}l_d$ описывают все матрицы $A_{\hat\alpha}{}^{\hat\beta}$. В частности, ϕ_n реализуются как γ–матрицы $\gamma_{n\hat\alpha}{}^{\hat\beta}$. Замечу, что в четырех измерениях спинорные индексы принимают $2^2=4$ значения.

Следует подчеркнуть важное отличие спиноров и тензоров. Размерность тензорных модулей алгебры Лоренца растет полиномиально с размерностью пространства-времени d. Например, число компонент общего тензора $A_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ в d измерениях равна d^k. С другой стороны, размерность спинорного модуля растет экспоненциально с d. Это затрудняет построение теорий в высших измерениях со сбалансированным числом бозонов и фермионов, как это требуется принципом суперсимметрии. Достижение этого баланса в конечном счете и приводит к выделенным размерностям как $d = 10$ и $d = 11$ в теории суперструн и M-теории.

Лекция 6.
2 курс, Осенний семестр, 24 октября 2019.

6.11 Спиноры

На прошлой лекции мы показали, что пространство Фока F_d, реализующее левый модуль алгебры Клиффорда, образовано векторами вида

$$|v\rangle \in F_d : \qquad |v\rangle = \sum_{p=0}^{d/2} v_{a_1 \dots a_p} \psi^{+a_1} \dots \psi^{+a_p} |0\rangle \,, \tag{6.1}$$

где $v_{a_1 \dots a_p}$ - произвольные полностью антисимметричные коэффициенты, а вакуумный вектор удовлетворяет условию

$$\psi_a^- |0\rangle = 0 \,.$$

Элементы F_d мы будем обозначать $\chi_{\hat{\alpha}}$, где спинорный индекс $\hat{\alpha} = 1, \dots 2^{d/2}$ нумерует элементы F_d. Элементы F_d^* обычно обозначаются $\bar{\chi}^{\hat{\alpha}}$. Общие элементы $\mathcal{C}l_d$ описывают все матрицы $A_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}$. В частности, ϕ_n реализуются как γ–матрицы $\gamma_{n\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}$. В четырех измерениях спинорные индексы принимают $2^2 = 4$ значения.

На лекции 4 мы убедились, что элементы алгебры Клиффорда

$$L_{nm} := \frac{1}{4}[\phi_n \,, \phi_m] \tag{6.2}$$

образуют алгебру Ли группы Лоренца по отношению к коммутированию.

Замечание: мы вернулись к нормировке элементов алгебры Ли без мнимой единицы с коммутационными соотношениями

$$[L_{nm} \,, L_{kl}] = \eta_{mk} L_{nl} - \eta_{nk} L_{ml} - \eta_{ml} L_{nk} + \eta_{nl} L_{mk} \,.$$

Значит всякое представление алгебры Клиффорда образует представление алгебры Ли группы Лоренца. В частности, построенный модуль Фока F_d образует представление $o(d-1,1)$, если метрика в определении алгебры Клиффорда η^{nm} была метрикой Минковского.

Важный вопрос: является ли этот модуль неприводимым? Легко видеть, что нет. Действительно, модуль Фока можно представить в виде прямой суммы двух подпространств

$$F_d = F_d^E \oplus F_d^O \,,$$

состоящих из элементов (6.1) с нечетными и четными p, соответственно. Несложно видеть, что каждое из этих подпространств образует $o(d-1,1)$-модуль.

Задача 6.1. Доказать

Другой важный факт состоит в том, что, как следствие тождества $(1-1)^{d/2} = 0$, подпространства F_d^E и F_d^O имеют одинаковую размерность

$$\dim F_d^E = \dim F_d^O = 2^{d/2-1} \,. \tag{6.3}$$

Задача 6.2. Доказать

Другой способ увидеть приводимость F_d это вспомнить про элемент Γ (3.15)

$$\Gamma := i^{\frac{d(d-1)}{2}} \sqrt{det|\eta|}\phi_0\phi_1 \dots \phi_{d-1} \,. \tag{6.4}$$

Хотя он антикоммутирует с ϕ_n при четном d, он коммутирует с любым четным числом ϕ_n и, в частности, с L_{nm}.

Задача 6.3. Доказать

Следовательно,

$$F_d^{\pm} := P^{\pm} F_d \,, \qquad P^{\pm} := \frac{1}{2}(I \pm \Gamma) \tag{6.5}$$

образуют инвариантные подпространства по отношению к действию $o(d)$. Элементы F_d^+ и F_d^- называются *киральными* (*левыми* и *правыми*) спинорами. Размерности $F_d^{\pm}$

$$\dim F_d^{\pm} = 2^{\frac{d}{2}-1} \,. \tag{6.6}$$

В частности киральные спиноры в четырехмерном пространстве-времени имеют две компоненты.

Можно убедиться, что разложения $F_d = F_d^+ \oplus F_d^-$ и $F_d = F_d^O \oplus F_d^E$ эквивалентны, т.е. F_d^+ изоморфен либо F_d^O либо F_d^E а F_d^- - второму.

Задача 6.4. Доказать. (Задача чуть сложнее остальных.)

В частности, размерность кирального спинора в десяти измерениях равна 16, что не так уж сильно превышает 10.

6.12 Представления группы Лоренца

Давайте теперь проанализируем как группа Лоренца действует на векторное и спинорное представления. Более точно, мы рассмотрим действие подгруппы вращений группы Лоренца. Поскольку, как мы убедились в прошлом семестре, любое вращение сводится к вращению в той или иной плоскости, не теряя общности можно выбрать элементарное вращение так, как удобно. Пусть это будет вращение в плоскости x_1, x_2.

6.12.1 Вращение вектора

Для начала давайте вспомним как вращения действуют на вектор. Как известно из школы и как мы убедились в прошлом семестре, закон преобразования компонент вектора A_1 и A_2 имеет вид

$$x_1' = \cos(\varphi)x_1 + \sin(\varphi)x_2 \,,$$
$$x_2' = \cos(\varphi)x_2 - \sin(\varphi)x_1 \,.$$

Отсюда, в частности, следует что поворот плоскости на 2π сводится к единичному преобразованию. В комплексных координатах

$$z = x_1 + ix_2 \,, \qquad \bar{z} = x_1 - ix_2 \,,$$

закон преобразований имеет вид

$$z' = \exp(-i\varphi)z\,, \qquad \bar{z}' = \exp(i\varphi)\bar{z}$$

Задача 6.5. Убедиться

Это соответствует следующему действию генератора алгебры Ли L_{12} поворота в комплексной плоскости z:

$$L_{12}z = -iz\,, \qquad L_{12}\bar{z} = i\bar{z}\,.$$

Задача 6.6. Проверить, вспомнив, что групповой элемент связан с генератором алгебры Ли экспоненциальным отображением

$$g = \exp(\varphi L_{12})\,.$$

6.12.2 Вращение спинора

Рассмотрим теперь случай спинорного представления. В случае алгебры Клиффорда генератор вращений в плоскости x_{12} имеет вид

$$L_{12} = \frac{1}{2}\phi_1\phi_2\,.$$

Задача 6.7. Убедиться

Вводя операторы рождения и уничтожения

$$\psi^{\pm} = \frac{1}{2}(\phi_1 \pm i\phi_2)\,,$$

получаем, что соответствующее пространство Фока двумерно с базисными векторами

$$|0\rangle\,, \qquad \psi^+|0\rangle\,.$$

(Напомню, что $\psi^-|0\rangle = 0$.) Как $o(2)$-модуль F_2 распадается в сумму двух одномерных подмодулей

$$F^E = \lambda|0\rangle\,, \qquad F^O = \lambda\psi^+|0\rangle\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

В терминах $\psi^{\pm}$, L_{12} имеет вид

$$L_{12} = i(\psi^+\psi^- - \frac{1}{2})\,.$$

Задача 6.8. Проверить.

Это дает

$$L_{12}|0\rangle = -\frac{i}{2}|0\rangle\,, \qquad L_{12}\psi^+|0\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle$$

откуда в частности следует, что F^E и F^O действительно являются инвариантными подпространствами по отношению к поворотам в плоскости x_{12}.

Таким образом, при вращении в плоскости закон преобразования спинора отличается от закона преобразования вектора коэффициентом $\frac{1}{2}$. Соответственно, групповое преобразование спинора имеет вид

$$\exp(L_{12})|0\rangle = \exp(-\frac{i}{2}\varphi)|0\rangle\,,$$

$$\exp(\varphi L_{12})\psi^+|0\rangle = \exp(\frac{i}{2}\varphi)\psi^+|0\rangle\,.$$

Сравнивая эту формулу с законом преобразования вектора видим, что спинор крутится вдвое медленней чем вектор. В частности, при повороте на 2π он не возвращается обратно, а меняет знак. Чтобы вернуться обратно требуется поворот на 4π. С математической точки зрения это означает, что спиноры образуют модули не псевдоортогональных групп $SO(p,q)$, а их двукратных накрывающих, которые обозначаются $Spin(p,q)$. Замечу, что алгебры Ли $SO(p,q)$ и $Spin(p,q)$ совпадают и равны $o(p,q)$.

Почему же мы все же думаем, что периодичность в нашем мире имеет место при поворотах на 2π а не 4π? Оказывается, что физические наблюдаемые всегда содержат четные комбинации полей полуцелых спинов, которые инвариантны при повороте на 2π. Это связано с принципом Паули в квантовой механике, выражающем $\mathbb{Z}_2$ градуировку алгебры физических наблюдаемых, по отношению к которой частицы целых спинов (бозоны) четны, а полуцелых спинов (фермионы) - нечетны.

Важный факт, установленный на предыдущих лекциях, состоит в том, что

$$[L_{nm}\,,\phi_l] = \eta_{lm}\phi_n - \eta_{ln}\phi_m\,. \tag{6.7}$$

В спинорном представлении, когда образующие ϕ_n реализуются как γ-матрицы $\gamma_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}$, это свойство обеспечивает релятивистскую инвариантность уравнения Дирака, которым мы сейчас и займемся.

6.13 Уравнение Дирака

Уравнение Дирака имеет вид

$$\left(i\gamma^n{}_{\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^n} + m\,\delta_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\right)\psi_{\hat{\beta}}(x) = 0\,, \tag{6.8}$$

где $\psi_{\hat{\beta}}(x)$ поле в пространстве Минковского со значениями в спинорном модуле - более коротко - *спинорное поле*. Произвольный параметр m имеет смысл массы. Этим уравнением описываются все поля материи кроме поля Хиггса (спин 0): электрон, мюон, нейтрино, кварки и т.д.

Главным свойством этого уравнения является его Пуанкаре-инвариантность. Пусть $g \in ISO(3,1)$ и $x'^a := g^a(x)$, $x'^a = A^a{}_b x^b + a^a$. Напомним результат действия g на скалярное поле $\phi(x)$: преобразованное поле в преобразованной точке равно исходному полю в исходной точке, т.е. $\phi'(x') = \phi(x)$. Это эквивалентно закону преобразования $\phi'(x) = \phi(g^{-1}(x))$.

Пусть теперь $\chi^{\hat{\alpha}}(x)$ принимает значения в любом модуле алгебры Ли группы Лоренца (индекс $\hat{\alpha}$). Тогда закон преобразования имеет вид

$$\chi'^{\hat{\alpha}}(x) = T^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}\chi^{\hat{\beta}}(g^{-1}(x))\,, \tag{6.9}$$

где $T^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}$ реализует представление Лоренцевой подгруппы группы Пуанкаре.

Напоминание: группа трансляций образует нормальный делитель группы Пуанкаре, а группа Лоренца реализует фактор-группу $iso(d-1,1)/T^d$. Поэтому всякий $o(d-1,1)$-модуль образует и $iso(d-1,1)$-модуль при тривиальном действии T^d.

Задача 6.9. Продумать.

Замечание: действие группового элемента g на аргумент x аналогично действию на правом модуле, а действие $T^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}\chi^{\hat{\beta}}$ - на левом. Поэтому аргумент χ содержит g^{-1} а не g.

Задача 6.10. Продумать.

Трансляционная инвариантность уравнения Дирака очевидна, так как оно не содержит явной зависимости от x.

Задача 6.11. Доказать.

Остается проверить инвариантность относительно лоренцевых преобразований. На практике, надо доказать, что если некоторое $\chi^{\hat{\alpha}}(x)$ решает уравнение Дирака, то и $\chi'^{\hat{\alpha}}(x)$ (6.9) его решает.

Задача 6.12. Доказать, что это следует из соотношения (6.10), которое в спинорном представлении имеет вид

$$[L_{nm}\,, \gamma_l] = \eta_{lm}\gamma_n - \eta_{ln}\gamma_m\,. \tag{6.10}$$

Задача 6.13. Доказать, что всякое решение уравнения Дирака является решением уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$\left(\Box + m^2\right)\psi_{\hat{\beta}}(x) = 0\,.$$

Напомню, что это свойство является необходимым для элементарной частицы, описываемой неприводимым Пуанкаре-модулем.

Лекция 7.
2 курс, Осенний семестр, 31 октября 2019.

7.14 Тензорное произведение

Мы изучили скалярное поле (спин 0), спинорное поле (спин 1/2) и, немного, векторное поле (спин 1). Какие еще релятивистские системы встречаются? Ответ на этот вопрос тесно связан с ответом на вопрос какие существуют представления группы Лоренца. То, что даже конечномерных представлений группы Лоренца бесконечно много следует из конструкции тензорного произведения, которую я сейчас введу.

Пусть V_1 и V_2 два линейных пространства. Мы знакомы с понятием прямой суммы $V_1 \oplus V_2$: элементы $(v_1\,, v_2)$ с линейным действием

$$\lambda(v_1\,, v_2) + \mu(w_1\,, w_2) = (\lambda v_1 + \mu w_1\,, \lambda v_2 + \mu w_2)\,.$$

Если $\{e_i\}$ и $\{e_\alpha\}$ - базисы в V_1 и V_2, то базис в $V_1 \oplus V_2$ есть $\{e_i\,, e_\alpha\}$.

Тензорное произведение задает другую операцию, сопоставляющую двум пространствам V и W третье, которое обозначается $V \otimes W$. Попросту говоря, тензорное произведение это замена понятия декартового произведения $V \times W$, согласованная с линейностью в том смысле, что

$$(a_1v_1 + a_2v_2) \otimes (b_1w_1 + b_2w_2) = a_1b_1v_1 \otimes w_1 + a_2b_1v_2 \otimes w_1 + a_1b_2v_1 \otimes w_2 + a_2b_2v_2 \otimes w_2 \quad (7.1)$$

Тензорное произведение отличается от линейной оболочки декартова произведения $Span V \times W$.

Задача 7.1. Какова размерность $Span(V_1 \times V_2)$?

Тензорное произведение можно понимать как фактор-пространство $Span(V_1 \times V_2)/E$ где E - подпространство $Span(V_1 \times V_2)$, натянутое на соотношения факторизации, т.е.

$$E = Span\{(a_1v_1 + a_2v_2) \otimes (b_1w_1 + b_2w_2) - a_1b_1v_1 \otimes w_1 - a_2b_1v_2 \otimes w_1 - a_1b_2v_1 \otimes w_2 - a_2b_2v_2 \otimes w_2\}$$

Задача 7.2. Доказать.

Разлагая векторы $v \in V$, $w \in W$ по базисам $\{e_i\} \in V$, $\{f_\alpha\} \in W$

$$v = \sum_i v^i e_i\,, \qquad w = \sum_\alpha w^\alpha f_\alpha\,,$$

получаем, что любой вектор тензорного произведения $V \otimes W$ разлагается в линейную комбинацию векторов $e_i \otimes f_\alpha$, которые и образуют базис $V \otimes W$. По определению тензорного произведения все эти вектора линейно независимы.

Задача 7.3. Убедиться.

Задача 7.4. Пусть $\dim V_1 = N_1$ и $\dim V_2 = N_2$. Убедиться, что $\dim V_1 \otimes V_2 = N_1 N_2$.

Тензорное произведение обладает свойством проективности: $V \otimes W$ - максимальное пространство, обладающее свойством билинейности по сомножителям. Формально это свойство выражается следующим образом: любое билинейное отображение $V\times W \overset{\rho}{\frown\!\!\!\longrightarrow} U$ может быть представлено в виде

$$V\times W\to V\otimes W \overset{\sigma}{\frown\!\!\!\longrightarrow} U = V\times W \overset{\rho}{\frown\!\!\!\longrightarrow} U$$

Важнейшим свойством тензорного произведения векторных пространств является его ассоциативность

$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 = V_1\otimes(V_2\otimes V_3)\,.$$

Это свойство наследуется из ассоциативности декартового (прямого) произведения

Задача 7.5. Доказать

Таким образом тензорное произведение порождает ассоциативную *тензорную алгебру* векторных пространств.

Задача 7.6. Что является единичным элементом тензорной алгебры?

Общий элемент тензорного произведения конечномерных пространств $V\otimes W$ имеет вид

$$a\in V\otimes W\;:\quad a=\sum_{i,\alpha}A^{i,\alpha}e_i\otimes f_\alpha\,.$$

Коэффициенты $A^{i,\alpha}$ несут индексы, отвечающие каждому из пространств V и W и в остальном произвольны. В приложениях, именно эти коэффициенты называются тензорами. Для приложений этого обычно достаточно.

Пусть V и W - линейные пространства функций $f(x)$ и $g(y)$, которые зависят от, вообще говоря, разных переменных x^a и y^α. Что такое пространство $V\otimes W$?

Задача 7.7. Убедиться, что $V\otimes W$ есть ни что иное как линейное пространство функций двух переменных $F(x,y)$.

Пусть g-некоторая алгебра Ли, а V_1 и V_2 некоторые g-модули, реализованные матрицами (операторами) T_{1i} и T_{2i}, действующими в пространствах V_1 и V_2, соответственно. Определим g-модуль как тензорное произведение $V_1\otimes V_2$, в котором действие g определяется следующим образом

$$T_{1,2}(V_1\otimes V_2) := T_1(V_1)\otimes V_2 + V_1\otimes T_2(V_2)\,. \tag{7.2}$$

Задача 7.8. Доказать, что такое определение действительно порождает g-модуль. Подсказка: нужно доказать, что

$$[T\,,T']_{1,2}(V_1\otimes V_2) = [T_1\,,T_1'](V_1)\otimes V_2 + V_1\otimes[T_2\,,T_2'](V_2)\,,$$

T и T' элементы представления g, отвечающие двум разным элементам g.

Таким образом мы пришли к важнейшему заключению, что тензорное произведение $V_1\otimes V_2$ двух g-модулей V_1 и V_2 порождает новый g-модуль. Это открывает широкие возможности для построения новых модулей по уже известным.

Например, пусть V - векторный модуль $o(p,q)$ с базисом e_a и элементами $v=v^ae_a$. Тогда элементы k кратного тензорного произведения $V\otimes V\otimes\ldots\otimes V$ описываются всевозможными тензорами $v^{a_1,a_2,\ldots,a_k}$.

Пусть W-спинорный $o(p,q)$-модуль с базисом $\{e_{\hat{\alpha}}\}$. Тогда элементы тензорных произведений $V\otimes V\otimes\ldots\otimes V\otimes W\ldots\otimes W$ описывают всевозможные спинор-тензоры $v^{a_1,a_2,\ldots,a_k\,\hat{\alpha}_1\ldots\hat{\alpha}_k}$ как коэффициенты перед $e_{a_1}\otimes e_{a_2}\otimes e_{a_k}\otimes e_{\hat{\alpha}_1}\otimes\ldots\otimes e_{\hat{\alpha}_l}$.

Хотя тензорные произведения порождают новые модули алгебр Ли, эти модули далеко не всегда неприводимы. Пусть V некоторый g-модуль. Рассмотрим тензорное произведение $V^n := \underbrace{V\otimes V\otimes\ldots\otimes V}_{n}$ модуля V с самим собой. На V^n действует симметрическая группа S_n, переставляющая различные сомножители. Например, если

$$v^2\in V^2\,,\qquad v^2 = A^{a\,b}e_a\otimes e_b$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование) то

$$T_{12}v^2 = A^{b\,a}e_a\otimes e_b\,,$$

где $T_{12}\in S_2$ элементарная перестановка V_1 и V_2. Аналогично, в общем случае элемент симметрической группы может описывать любую подстановку.

Пусть теперь V это g-модуль. Тогда и V^n-g-модуль. Важный факт состоит в том, что симметрическая группа порождает гомоморфизмы V^n в себя. Это следствие симметрии определения (7.2) действия алгебры Ли на тензорном произведении.

Задача 7.9. Доказать.

Это позволяет классифицировать различные g-модули в терминах типов симметрии по отношению к S_n, т.е. по ее представлениям.

Рассмотрим простейший пример. Пусть V-векторное пространство gl_n

$$v\in V: v = v^a e_a\,,\qquad a=1,\ldots n\,,$$

$$t(v) = t^a{}_b v^b e_a\,,\qquad t^a{}_b\in gl_n\,.$$

Представим $V\otimes V$ в виде

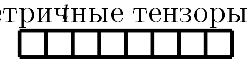
$$V\otimes V = (V\otimes V)_S\oplus(V\otimes V)_A\,,$$

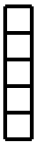
где

$$V_S := v_S^{(ab)}e_a\otimes e_b\,,\qquad V_A := v_A^{(ab)}e_a\otimes e_b$$
$$v_S^{(ab)} = v_S^{(ba)}\,,\qquad v_A^{(ab)} = -v_A^{(ba)}\,.$$

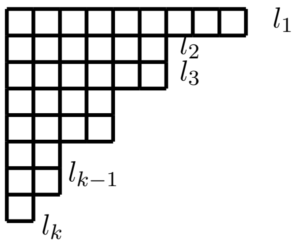
Легко видеть, что V_S и V_A образуют два неприводимых подмодуля симметрической группы $S_2=\mathbb{Z}_2$: на V_S S_2 действует тривиально, а на V_A элементарная подстановка меняет знак элемента. Попросту говоря, мы разбили тензор неопределенного типа симметрии в сумму симметричного и кососимметричного, каждый из которых образует gl_n-модуль.

В общем случае, это позволяет строить инвариантные подпространства V^k проектированием на различные неприводимые представления симметрической группы. Последние характеризуются различными диаграммами Юнга. Эта конструкция является очень общей, выражая двойственность теории представлений взаимно-коммутативных структур.

На этом языке, каждому сомножителю V сопоставляется ящик $\Box$. Полностью симметричные тензоры ранга l обозначаются горизонтальными строками из ящиков длины l 

а полностью антисимметричные тензоры ранга h обозначаются вертикальными столбцами высоты h. 

Другие типы симметризации описываются всевозможными диаграммами Юнга $Y(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k)$:



$$l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_k$$

$$l_1 + l_2 + \ldots l_k = n$$

.

Общая диаграмма описывает тензор

$$A^{a_1(l_1), a_2(l_2), \ldots a_k(l_k)},$$

который симметричен по l_1 индексам a_1, l_2 индексам a_2, и т.д. Здесь в скобках указывается число индексов iой группы l_i, по которым производится симметризация. Определяющим свойством диаграмм Юнга является требование, что симметризация любого индекса из строки с номером j со всеми индексами любой строки с номером $i < j$ дает ноль. Иными словами, симметричный базис представлен тензорами вида $A^{a_1(l_1), a_2(l_2), \ldots, a_k(l_k)}$, удовлетворяющими условиям Юнга в форме

$$A^{a_1(l_1), a_2(l_2), \ldots, a_m(l_m), \ldots, a_m\, a_{m+p}(l_{m+p}-1), \ldots, a_k(l_k)} = 0 \tag{7.3}$$

Тот факт, что $l_m \geq l_{m+p}$ является следствием этих условий. Действительно, рассмотрим для простоты тензор $A^{a(m), b(n)}$, описываемый диаграммой недопустимой формы с $m < n$. Обозначая симметризованные индексы одной буквой и используя условие Юнга, получаем

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|cc}\hline a&a&a&a&a&&\\ \hline b&b&b&b&b&\multicolumn{1}{|c}{b}&\multicolumn{1}{|c|}{b}\\ \hline\end{array} + m \begin{array}{|c|c|c|c|c|cc}\hline a&a&a&a&b&&\\ \hline b&b&b&b&b&\multicolumn{1}{|c}{b}&\multicolumn{1}{|c|}{a}\\ \hline\end{array} = 0\,,$$

$$2 \begin{array}{|c|c|c|c|c|cc}\hline a&a&a&a&b&&\\ \hline b&b&b&b&b&\multicolumn{1}{|c}{b}&\multicolumn{1}{|c|}{a}\\ \hline\end{array} + (m-1) \begin{array}{|c|c|c|c|c|cc}\hline a&a&a&b&b&&\\ \hline b&b&b&b&b&\multicolumn{1}{|c}{a}&\multicolumn{1}{|c|}{a}\\ \hline\end{array} = 0\,, \qquad etc$$

В результате, $\begin{array}{ccccccc} a & a & a & a & a & & \\ b & b & b & b & b & b & b \end{array} = (-1)^m C_n^m \begin{array}{ccccccc} b & b & b & b & b & & \\ a & a & a & a & a & b & b \end{array}$

или, эквивалентно,

$$A^{a(m),b(n)} = (-1)^m C_n^m A^{b(m),(a(m)b(n-m))}$$

Снова используя условие Юнга (7.3) в случае $n - m > 0$ получаем $A^{a(m),b(n)} = 0$.

Заметим, что по ходу дела мы доказали важное соотношение

$$A^{a(m),b(m)} = (-1)^m A^{b(m),a(m)} \,.$$

Кроме симметричного базиса, часто используется антисимметричный базис, в котором явной является антисимметрия индексов по столбцам с условием, что антисимметризация по любому индексу из n-ого столбца со всеми индексами m-ого столбца дает ноль при $n > m$. Важно понимать, что в общем случае невозможно добиться явной симметрии по строкам и антисимметрии по столбцам одновременно. Но переход от одного базиса к другому осуществляется достаточно просто. Например, начиная с симметричного базиса, можно антисимметризовать максимум h_1 (где h_1 число строк в диаграмме) индексов, поскольку антисимметризация по любым индексам из одной строки дает ноль. Затем можно антисимметризовать по h_2 индексам, что ведет к образованию второго столбца высоты h_2 и т.д.

Задача 7.10. Связать компоненты тензоров типа *крюк* $A^{aa,b}$ и *окошко* $A^{aa,bb}$ в симметричном базисе с их компонентами в антисимметричном базисе.

Диаграммы Юнга - это очень содержательный сюжет, о котором мы обычно рассказываем в ФИАНе в осеннем семестре на втором курсе в связке с важным понятием двойственности Хау, дающей мощный инструмент анализа представлений.

Пусть V -некоторое линейное пространство с базисом $\{e_i\}$, а V^* сопряженное пространство с базисом $\{e^{*i}\}$. Напомню, что V^* это пространство линейных функционалов $v^*(v)$ на V. Канонический выбор базисов таков, что

$$e^{*i}(e_j) = \delta^i_j \,.$$

Несложно убедиться, что пространство $V \otimes V^* = A^i{}_j e_i \otimes e^{*j}$ есть пространство всех линейных отображений V в себя (*эндоморфизмов* $End\, V$).

Задача 7.11. Доказать

Задача 7.12. Разложить $F \otimes F^*$, где F - модуль Фока алгебры Клиффорда в прямую сумму неприводимых $o(n)$-модулей.

Замечание: в теории суперструн поля со значениями в этом модуле играют важную роль и называются *полями Рамона-Рамона* в честь Пьера Рамона, который их впервые ввел в игру.

Лекция 10.
2 курс. Осенний семестр, 28 ноября 2019.

Лукции 8 и 9 прочитали Диденко (детали уравнения Дирака) и Мисуна (уравнения Янга-Миллса). 14 ноября состоялась контрольная. Данная лекция вместила больше материала чем обычно, потому что геометрические вопросы, связанные с дифференциальными формами, оказались хорошо знакомыми слушателям.

10.15 Глобальные и локальные симметрии.

Непрерывные симметрии в релятивистской теории делятся на две группы - *глобальные* и *локальные*. Коротко говоря, параметры глобальной симметрии ε^i постоянны - не зависят от x, параметры *калибровочных* или (*локальных*) симметрий $\varepsilon^i(x)$ являются произвольными функциями x^n. Мы увидим, что до какой-то степени глобальные симметрии можно понимать как частный случай локальных для определенных функций $\varepsilon^i(x)$.

Мы изучали уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$\Box\phi + m^2\phi = 0\,.$$

Какие его симметрии мы знаем? Релятивистские: группа Пуанкаре. Группа Лоренца описывается псевдоортогональными матрицами, удовлетворяющими условиям

$$A^n{}_m A^k{}_l \eta^{ml} = \eta^{nk}\,.$$

Задача 10.1. Это глобальная или локальная симметрия? Сколько независимых параметров симметрии? = какова размерность групп Лоренца и Пуанкаре?

Замечание: хотя преобразования явно зависят от координат x^n, число параметров конечно. Группа Пуанкаре описывает глобальные преобразования симметрии.

Пусть полей ϕ^A несколько: $A = 1, 2, \dots N$.

Задача 10.2. Какие новые симметрии появляются в этом случае?

Перейдем к новому полю

$$\phi'^A(x) = A^A{}_B \phi^B(x)\,.$$

Будет это симметрией уравнений

$$\Box\phi^A + m^2\phi^A = 0\,? \tag{10.1}$$

Ответ: конечно да, если матрица $A^A{}_B$ постоянна. Действительно, если $\phi^A(x)$ решало уравнение (10.1), то и $\phi'^A(x)$ его решает.

Задача 10.3. Что это за группа преобразований?

Ответ - группа невырожденных матриц $GL(N)$.

Пусть поля $\phi^A(x)$ комплексны, а действие имеет вид

$$S = \int d^4x \left(\partial_n\bar\phi_A(x)\partial_m\phi^A(x)\eta^{nm} + m^2\bar\phi_A(x)\phi^A(x)\right)\,.$$

Какова группа симметрии этого действия? Очевидно в этом случае должно выполняться условие

$$\bar{A}_A{}^B A^A{}_C = \delta^B_C \,.$$

Это группа $U(N)$.

Аналогично вводятся группы внутренних симетрий полей спина $1/2$, описывающихся уравнением Дирака. Группа симметрий стандартной модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Уместно задать вопрос а все ли это симметрии свободных уравнений Дирака и КГФ? Ответ - нет. Группа Пуанкаре и внутренних симметрий типа $U(N)$ являются лишь их небольшой частью. Полные симметрии свободных уравнений оказываются бесконечномерными и называются симметриями высших спинов.

До сих пор мы обсуждали глобальные (конечномерные) симметрии. Но Янг и Миллс впервые сообразили, что ситуация с глобальными симметриями какая-то странная. С одной стороны в релятивистской теории сигналы не могут распространяться быстрее скорости света. С другой стороны, применение глобального преобразования симметрии одинаково во всем пространстве-времени. (Или даже более того - при вращениях всего пространства-времени эфффект преобразования тем больше, чем дальше от начала координат.) Как-то это странно. Поэтому они сказали, что настоящие симметрии должны быть такими, что их параметры - произвольные функции координат $A^A{}_B(x)$. Это привело Янга и Миллса к фундаментальной теории, которая носит сегодня их имя и о которой на прошлой лекции вам начал рассказывать Никита.

В случае полей Янга-Миллса параметры симметрии $\varepsilon^A{}_B(x)$ не несут пространственно-временных векторных индексов. Такие симметрии называются *внутренними* и, в соответствии с теорией Фронсдала безмассовых полей, ассоциируются с калибровочными полями спина $s = 1$. В случае спина 2, параметр симметрии несет один пространственно-временной индекс $\epsilon^{\underline{n}}$. Какие же калибровочные симметрии и поля соответствуют этому случаю. Оказывается, что соответствующая калибровочная теория - это теория гравитации Эйнштейна, а калибровочная симметрия выражает принцип эквивалентности Эйнштейна, требующий, чтобы физические законы выглядели одинаково в любых координатах. Т.е. симметрия спина 2 состоит в требовании инвариантности относительно диффеоморфизмов.

10.16 Диффеоморфизмы

Диффеоморфизмы описывают гладкие преобразования от одной системы координат к другой

$$x'^{\underline{n}} = x'^{\underline{n}}(x)$$

такие, что преобразования $x'^{\underline{n}}(x)$ гладкие и обратимые. В случае, когда преобразования близки к единичному

$$x'^{\underline{n}}(x) = x^{\underline{n}}(x) + \varepsilon^{\underline{n}}(x) \,,$$

$\varepsilon^{\underline{n}}(x)$ можно понимать как произвольно зависящий от точки пространства-времени инфинитезимальный сдвиг. Поскольку $\varepsilon^{\underline{n}}(x)$ является произвольной (гладкой) функцией координат, диффеоморфизмы также дают пример локальной симметрии. Как мы увидим, калибровочной теорией, отвечающей за диффеоморфизмы, является общая теория относительности.

Перейдем теперь к преобразованиям полей. Начнем со скалярного поля, которое преобразуется по уже знакомому нам закону

$$\phi'(x') = \phi(x)\,. \tag{10.2}$$

Это "активная точка зрения", когда считается, что точка x переходит в другую точку x'. Можно считать, что точка не меняется, а имеет место переход к другим координатам.

Рассмотрим инфинитезимальный диффеоморфизм

$$x'^{\underline{n}} = x^{\underline{n}} - \varepsilon^{\underline{n}}(x) \quad \longleftrightarrow \quad \delta x^{\underline{n}} = -\varepsilon^{\underline{n}}(x)\,.$$

Формула (10.2) приобретает вид

$$\phi'(x - \varepsilon(x)) = \phi(x)\,.$$

Разлагая в ряд, получаем

$$\phi'(x) - \phi(x) = \varepsilon^{\underline{n}}(x)\partial_{\underline{n}}\phi(x) + O(\varepsilon^2)\,, \qquad \partial_{\underline{n}} := \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}\,.$$

Член $\varepsilon^{\underline{n}}(x)\partial_{\underline{n}}\phi(x)$ называется *транспортным*. Он описывает изменение поля при сдвиге в соседнюю точку. Этот член можно понимать как результат локализации сдвига из группы Пуанкаре

$$x^{\underline{n}} \to x^{\underline{n}} + a^{\underline{n}}\,, \qquad a^{\underline{n}} \to a^{\underline{n}}(x)\,.$$

Рассмотрим теперь как преобразуется производная скалярного поля

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\underline{n}}}\phi'(x') = \frac{\partial x^{\underline{m}}}{\partial x'^{\underline{n}}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{m}}}\phi'(x') = \frac{\partial x^{\underline{m}}}{\partial x'^{\underline{n}}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{m}}}\phi(x)\,. \tag{10.3}$$

Таким образом, помимо переноса точки, закон преобразования производной содержит еще подкрутку матрицей Якоби

$$J_{\underline{n}}^{\underline{m}} := \frac{\partial x^{\underline{m}}(x')}{\partial x'^{\underline{n}}}\,.$$

Задача 10.4. Как связаны матрицы Якоби прямого и обратного преобразований?

Дифференциал, очевидно, преобразуется следующим образом

$$dx'^{\underline{n}}(x) = \frac{\partial x'^{\underline{n}}(x)}{\partial x^{\underline{m}}}dx^{\underline{m}} \tag{10.4}$$

Задача 10.5. Доказать

В результате, оператор $dx^{\underline{n}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}$ оказывается скаляром, т.е. дифференциал скалярного поля

$$dx^{\underline{n}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}\phi(x)$$

преобразуется как скаляр.

Формулы (10.3) и (10.4) подсказывают как должны преобразовываться ковариантные тензоры $A_{\underline{n}_1,\dots\underline{n}_k}$ и контравариантные тензоры $A^{\underline{n}_1,\dots\underline{n}_k}$

$$A'_{\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_k}(x') = \frac{\partial x^{\underline{m}_1}}{\partial x'^{\underline{n}_1}} \dots \frac{\partial x^{\underline{m}_k}}{\partial x'^{\underline{n}_k}} A_{\underline{m}_1,\dots,\underline{m}_k}(x)\,,$$

$$A'^{\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_k}(x') = \frac{\partial x'^{\underline{n}_1}}{\partial x^{\underline{m}_1}} \dots \frac{\partial x'^{\underline{n}_k}}{\partial x^{\underline{m}_k}} A^{\underline{m}_1,\dots,\underline{m}_k}(x)\,.$$

При таком определении свертка верхних и нижних индексов является инвариантной операцией, т.е.

$$A^{\underline{n}}(x)B_{\underline{n}}(x)$$

является скаляром.

Задача 10.6. Проверить.

Найдем инфинитезимальный закон преобразования вектора $A_{\underline{n}}$

$$A'_{\underline{n}}(x-\varepsilon(x)) = \left(\delta^{\underline{m}}_{\underline{n}} + \frac{\partial\varepsilon^{\underline{m}}(x)}{\partial x^{\underline{n}}}\right) A_{\underline{m}}(x)$$

или, эквивалентно,

$$\delta A_{\underline{n}}(x) = \frac{\partial\varepsilon^{\underline{m}}(x)}{\partial x^{\underline{n}}} A_{\underline{m}}(x) + \varepsilon^{\underline{m}}(x)\partial_{\underline{m}}A_{\underline{n}}(x)$$

Задача 10.7. Проверить

Аналогично, для контравариантного вектора получаем

$$\delta A^{\underline{n}}(x) = -\frac{\partial\varepsilon^{\underline{n}}(x)}{\partial x^{\underline{m}}} A^{\underline{m}} + \varepsilon^{\underline{m}}(x)\partial_{\underline{m}}A^{\underline{n}}(x)\,.$$

Задача 10.8. Проверить

Все это замечательно, но является ли ковариантной операция дифференцирования?

Для скалярного поля $\partial_{\underline{n}}\varphi$ - вектор, т.е. производная скаляра ковариантна. Будет ли тензором производная вектора? Прямое вычисление дает

$$\partial'_{\underline{n}}A'_{\underline{m}} = \frac{\partial x^{\underline{r}}}{\partial x'^{\underline{n}}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{r}}}\left(\frac{\partial x^{\underline{p}}}{\partial x'^{\underline{m}}}A_{\underline{p}}\right) = \frac{\partial x^{\underline{r}}}{\partial x'^{\underline{n}}}\frac{\partial x^{\underline{p}}}{\partial x'^{\underline{m}}}\partial_{\underline{r}}A_{\underline{p}} + \frac{\partial^2 x^{\underline{p}}}{\partial x'^{\underline{n}}\partial x'^{\underline{m}}}A_{\underline{p}}\,.$$

Задача 10.9. Проверить

Отсюда видно, что первый член имеет правильный вид, а второй нет. Член $\frac{\partial^2 x^{\underline{p}}}{\partial x^{\underline{r}}\partial x'^{\underline{m}}}A_{\underline{p}}$ нековариантен и с ним можно бороться как в теории Янга-Миллса с помощью введения соответствующей ковариантной производной

$$D_{\underline{n}}A_{\underline{m}}(x) := \partial_{\underline{n}}A_{\underline{m}}(x) - \Gamma^{\underline{r}}_{\underline{nm}}(x)A_{\underline{r}}(x)\,.$$

Поля $\Gamma^{\underline{r}}_{\underline{nm}}(x)$ називаются символами Кристоффеля и играют фундаментальную роль в римановой геометриии. Я про это рассказывать не буду (на нашей программе эти вопросы подробно освещаются в курсе Зельникова). Вместо этого я буду использовать теорию дифференциальных форм Картана, которая опирается на простое наблюдение, что антисимметризованная комбинация производной вектора

$$\partial_{\underline{n}} A_{\underline{m}} - \partial_{\underline{m}} A_{\underline{n}}$$

преобразуется ковариантно, не требуя введения связности.

Задача 10.10. Проверить

В связи с этим хочу сделать два замечания.

Во-первых, мы это выражение уже видели - не так ли? Это напряженность электромагнитного поля, которая действительно является два-формой, как мы сейчас увидим.

Во-вторых, этот пример показывает насколько внимательным надо быть к "мелочам" в фундаментальной науке и математике в частности. Из простого наблюдения ковариантности антисимметризованной комбинации производной вектора вырастает очень важный кусок дифференциальной геометрии, гомологии и математики в целом.

10.17 Дифференциальные формы

Дифференциальными формами называются полностью антисимметричные ковариантные тензоры $A_{\underline{n}_1,\cdots \underline{n}_p}(x)$

$$A_{\cdots\underline{n}\cdots\underline{m}\cdots}(x) = -A_{\cdots\underline{m}\cdots\underline{n}\cdots}(x)\,.$$

Ранг антисимметричного тензора p называется *степенью формы*, а $A_{\underline{n}_1,\cdots,\underline{n}_p}(x)$ называется p-формой. Пространство p-форм обозначается как Λ^p, а всех форм как Λ.

Операция дифференцирования с последующей антисимметризацией называется *внешним дифференцированием* d

$$\mathrm{d}A \qquad \longrightarrow \qquad \partial_{[\underline{n}_1} A_{\underline{n}_2\cdots\underline{n}_{p+1}]}\,.$$

Поскольку, по определению, результатом является полностью антисимметричный ковариантный тензор, внешний дифференциал действует на пространстве форм Λ, отображая p-формы в $p+1$-формы

$$\mathrm{d}\Lambda^p \subset \Lambda^{p+1}\,.$$

Внешний дифференциал обладает двумя важнейшими свойствами

- $\mathrm{dd} = 0$

- Внешнее дифференцирование ковариантно: результат внешнего дифференцирования преобразуется как форма.

Задача 10.11. Доказать, используя, что все члены с двумя производными сокращаются как и в случае один-форм.

Теперь мы воспользуемся нашими знаниями про алгебру Клиффорда и ее подалгебру - алгебру Грассмана. Именно, антисимметричные тензоры можно понимать как коэффициенты разложения элементов алгебры Грассмана порожденных "антикоммутирующими координатами"

$$\theta^{\underline{n}}\theta^{\underline{m}} = -\theta^{\underline{m}}\theta^{\underline{n}}\,,$$

т.е. формы это функции антикоммутирующих координат $\theta^{\underline{n}}$ и обычных координат $x^{\underline{n}}$

$$\omega(\theta, x) = \sum_{p=0}^{\dim M} \theta^{\underline{n}_1} \dots \theta^{\underline{n}_p} \omega_{\underline{n}_1,\dots,\underline{n}_p}(x)\,, \qquad \underline{n} = 1, \dots \dim M\,.$$

p-формы это однородные полиномы степени p по $\theta^{\underline{n}}$. На то, что в $\omega(\theta, x)$ складываются формы разных степерей, можно смотреть как на удобное формальное выражение. Со временем мы поймем, надеюсь, что такой язык является не только наиболее компактным, но и наиболее адекватным по существу.

В литературе обычно вместо $\theta^{\underline{n}}$ используется обозначение $dx^{\underline{n}}$, а антикоммутативность произведения обозначается символом *внешнего произведения* $\wedge$

$$dx^{\underline{n}} \wedge dx^{\underline{m}} = -dx^{\underline{m}} \wedge dx^{\underline{n}}\,.$$

Поскольку эти обозначения громоздки и могут сбивать с толка - мы будем использовать обозначения $\theta^{\underline{n}}$, не требующие символа $\wedge$.

Пространство дифференциальных форм $\mathbb{Z}_2$ градуировано с градуировкой, порождаемой нечетными переменными (дифференциалами) $\theta^{\underline{n}}$

$$\omega(-\theta, x) = (-1)^{\pi_\omega}\omega(\theta, x)\,. \tag{10.5}$$

Иными словами формы (не)четных степеней образуют (не)четное подпространство Λ.

Пространство дифференциальных форм образует алгебру по отношению к естественному произведению. Эта алгебра $\mathbb{Z}_2$ градуирована. Произведение (на обычном языке внешнее произведение) форм обладает свойством (анти)коммутативности

$$\omega_1(\theta, x)\omega_2(\theta, x) = (-1)^{\pi_{\omega_1}\pi_{\omega_2}}\omega_2(\theta, x)\omega_1(\theta, x)\,.$$

Задача 10.12. Убедиться

В этих терминах внешний дифференциал приобретает вид

$$\mathrm{d} := \theta^{\underline{n}}\frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}\,, \tag{10.6}$$

где предполагается, что

$$\frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}(\theta^{\underline{m}}) = 0\,.$$

Задача 10.13. Проверить, что $\mathrm{d}^2 = 0$.

Внешний дифференциал является нечетным дифференцированием алгебры дифференциальных форм.

Задача 10.14. Проверить, что выполнено градуированное правило Лейбница.

$$\mathrm{d}(\omega_1\omega_2) = \mathrm{d}(\omega_1)\omega_2 + (-1)^{\pi_{\omega_1}}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \,.$$

Понятия дифференциальных форм и внешнего дифференциала - начало большого геометрического пути, по которому мы сейчас немного продвинимся, начав с понятий векторного поля, внутреннего дифференцирования и производной Ли.

Векторным полем называется любой дифференциальный оператор первого порядка

$$V^{\underline{n}}(x)\partial_{\underline{n}} \,,$$

т.е. контравариантный вектор $V^{\underline{n}}(x)$ задает векторное поле.

Оператор *внутреннего дифференцирования*, порождаемый любым векторным полем $V^{\underline{n}}(x)$

$$i_V := V^{\underline{n}}(x)\frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}} \,, \tag{10.7}$$

действует на дифференциальных формах, понижая их степень, т.е.

$$i_V(\Lambda^p) \subset \Lambda^{p-1} \,.$$

Задача 10.15. Убедиться

Производная по антикоммутирующим переменным задается клиффордовыми соотношениями

$$\theta^{\underline{n}}\theta^{\underline{m}} = -\theta^{\underline{m}}\theta^{\underline{n}} \,, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}}\theta^{\underline{m}} + \theta^{\underline{m}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}} = \delta^{\underline{m}}_{\underline{n}} \,, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{m}}} + \frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{m}}}\frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}} = 0 \,.$$

В этих терминах

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}}(\omega) := \frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}}\omega - (-1)^{\pi_\omega}\omega\frac{\partial}{\partial\theta^{\underline{n}}}$$

Задача 10.16. Убедиться

Из (10.7) следует, что

$$i_V^2 = 0 \,.$$

Задача 10.17. Доказать

Как и внешний дифференциал, внутреннее дифференцирование является нечетным дифференцированием алгебры дифференциальных форм.

Задача 10.18. Проверить, что выполнено градуированное правило Лейбница.

$$i_V(\omega_1\omega_2) = i_V(\omega_1)\omega_2 + (-1)^{\pi_{\omega_1}}\omega_1 i_V\omega_2 \,.$$

Пусть даны два оператора d и ∂, такие что

$$d^2 = \partial^2 = 0 \,.$$

Тогда оператор

$$\Delta := \{d\,,\partial\}$$

коммутирует с каждым из них

$$d\Delta = \Delta d\,, \qquad \partial\Delta = \Delta\partial\,. \tag{10.8}$$

Задача 10.19. Убедиться

В следствие общих свойств дифференцирований, обсуждавшихся в лекции 4, если d и ∂ были нечетными дифференцированиями той или иной алгебры, то Δ будет ее четным дифференцированием.

Задача 10.20. Убедиться

Будучи совсем простым, свойство (10.8) чрезвычайно важно и имеет множество применений. С его помощью мы докажем в одну строчку важнейшее свойство ковариантности внешнего дифференциала, лежащее в основе теории дифференциальных форм.

Производная Ли вдоль векторного поля V определяется как

$$\mathcal{L}_V := \mathrm{d}i_V + i_V\mathrm{d}\,.$$

Как мы увидим, $\mathcal{L}_V$ определяет действие инфинитезимального диффеоморфизма вдоль векторного поля $V^{\underline{n}}$, понимаемого как инфинитезимальный параметр $\varepsilon^{\underline{n}}$. В силу своего определения, $\mathcal{L}_V$ является четным дифференцированием алгебры дифференциальных форм

$$[\mathcal{L}_V\,, \omega_1\omega_2] = [\mathcal{L}_V\,, \omega_1]\omega_2 + \omega_1[\mathcal{L}_V\,, \omega_2]\,.$$

и коммутирует с внешним дифференциалом

$$\mathcal{L}_V\mathrm{d} = \mathrm{d}\mathcal{L}_V\,. \tag{10.9}$$

Последний факт исключительно важен, так как он означает, что внешний дифференциал инвариантен относительно действия диффеоморфизмов: результат применения внешнего дифференциала и инфинитезимального диффеоморфизма не зависит от порядка действий.

Лекция 11.
2 курс. Осенний семестр, 5 декабря 2019.

11.18 Дифференциальные формы

Начну с напоминания. На прошлой лекции мы определили формы как функции антикоммутирующих координат $\theta^{\underline{n}}$ и обычных координат $x^{\underline{n}}$

$$\omega(\theta, x) = \sum_{p=0}^{\dim M} \theta^{\underline{n}_1} \dots \theta^{\underline{n}_p} \omega_{\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_p}(x)\,, \qquad \underline{n} = 1, \dots \dim M\,,$$

определили производные по антикоммутирующим координатам как клиффордовы образующие, подчиненные соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{n}}} \theta^{\underline{m}} + \theta^{\underline{m}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{n}}} = \delta^{\underline{m}}_{\underline{n}}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{n}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{m}}} + \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{m}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{n}}} = 0\,, \tag{11.1}$$

ввели внешний дифференциал

$$\mathrm{d} := \theta^{\underline{n}} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}\,,$$

внутреннее дифференцирование

$$i_V := V^{\underline{n}}(x) \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{n}}}$$

и производную Ли вдоль векторного поля V

$$\mathcal{L}_V := \mathrm{d} i_V + i_V \mathrm{d}\,.$$

Убедились, что $\mathrm{d}^2 = 0$ и, как следствие,

$$\mathcal{L}_V \mathrm{d} = \mathrm{d} \mathcal{L}_V\,.$$

Было анонсировано, что производная Ли порождает инфинитезимальные диффеоморфизмы. Давайте в этом убедимся. Прямая подстановка дает

$$\mathcal{L}_V = \theta^{\underline{n}} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}} V^{\underline{m}}(x) \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{m}}} + V^{\underline{m}}(x) \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{m}}} \theta^{\underline{n}} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}\,.$$

Протаскивая производные направо и учитывая антикоммутативность $\theta^{\underline{n}}$ (т.е. (11.1)) убеждаемся, что члены со вторыми производными сокращаются и, в результате,

$$\mathcal{L}_V = \theta^{\underline{n}} \frac{\partial V^{\underline{m}}(x)}{\partial x^{\underline{n}}} \frac{\partial}{\partial \theta^{\underline{m}}} + V^{\underline{n}}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}\,. \tag{11.2}$$

Если $\mathcal{L}_V$ действует на θ-независимую ноль-форму (т.е., на скаляр) $\phi(x)$, то

$$\mathcal{L}_V \phi(x) = V^{\underline{n}}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}} \phi(x)\,.$$

Это знакомый нам транспортный член.

Пусть $\omega = \theta^{\underline{n}} A_{\underline{n}}$ - один-форма. Тогда

$$\mathcal{L}_V \omega = \theta^{\underline{n}} \frac{\partial V^{\underline{m}}(x)}{\partial x^{\underline{n}}} A_{\underline{m}} + \theta^{\underline{m}} V^{\underline{n}}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}} A_{\underline{m}}(x)\,,$$

Что как раз воспроизводит действие диффеоморфизма с инфинитезимальным параметром $V^{\underline{n}}(x)$ на один-форму

$$\mathcal{L}_V A_{\underline{n}}(x) = \frac{\partial V^{\underline{m}}(x)}{\partial x^{\underline{n}}} A_{\underline{m}}(x) + V^{\underline{m}}(x) \frac{\partial A_{\underline{n}}(x)}{\partial x^{\underline{m}}}\,.$$

В случае p-формы $\phi_{\underline{n}_1,\dots \underline{n}_p}(x)$ подкрутка матрицей $\frac{\partial V^{\underline{m}}(x)}{\partial x^{\underline{n}}}$ будет действовать на каждый из индексов $\underline{n}_i$ (сумма членов) в соответствии с общим определением.

Итак, мы убедились, что $\mathcal{L}_V$ порождает инфинитезимальный диффеоморфизм вдоль $V^{\underline{n}}$. Операция внешнего дифференцирования инвариантна относительно диффеоморфизмов. Именно инвариантность относительно преобразований координат обуславливает ценность формализма дифференциальных форм.

Поскольку последовательное применение диффеоморфизмов дает диффеоморфизм, диффеоморфизмы на многообразии M образуют группу $Diff(M)$. Соответственно, инфинитезимальные диффеоморфизмы порождают алгебру Ли $diff(M)$. Формула (11.2) позволяет легко найти алгебру Ли диффеоморфизмов.

Легче всего это сделать на скалярном поле свободным от зависимости от $\theta^{\underline{n}}$. Элементарное вычисление дает

$$[\mathcal{L}_{V_1}\,, \mathcal{L}_{V_2}] = \mathcal{L}_{V_{1,2}}\,, \tag{11.3}$$

где векторное поле $V^{\underline{n}}_{1,2}$ выражается через векторные поля $V^{\underline{n}}_1$ и $V^{\underline{n}}_2$ соотношением

$$V^{\underline{n}}_{1,2}(x) = V^{\underline{m}}_1(x) \frac{\partial V^{\underline{n}}_2(x)}{\partial x^{\underline{m}}} - V^{\underline{m}}_2(x) \frac{\partial V^{\underline{n}}_1(x)}{\partial x^{\underline{m}}} \tag{11.4}$$

Задача 11.1. Убедиться.

При действии на произвольные формы формула (11.3) также применима с тем же $V^{\underline{n}}_{1,2}$.

Задача 11.2. Доказать.

Формулы (11.3), (11.4) носят фундаментальный характер, определяя алгебру Ли диффеоморфизмов $diff(M)$, где M - многообразие, на котором действуют диффеоморфизмы.) Эта алгебра бесконечномерна, так как ее параметры (векторные поля) являются произвольными функциями координат. Это означает, что диффеоморфизмы описывают локальную симметрию, когда речь идет о гравитации. Очевидно, алгебра $diff(M)$ неабелева.

Описывая всевозможные диффеоморфизмы, алгебра диффеоморфизмов описывает и конкретные алгебры диффеоморфизмов как подалгебры.

Задача 11.3. Как надо выбрать параметры $V^{\underline{n}}(x)$, чтобы они описывали преобразования из алгебры Ли группы Пуанкаре?

$$\varepsilon^{\underline{n}}(x) = \varepsilon^{\underline{nm}} x_{\underline{m}} + a^{\underline{n}}\,, \qquad \varepsilon^{\underline{nm}} = -\varepsilon^{\underline{mn}}\,.$$

Задача 11.4. Проверить, что соответствующие диффеоморфизмы действительно правильно воспроизводят преобразования из группы Пуанкаре и алгебру Ли группы Пуанкаре.

11.19 Когомологии

В пространстве всех форм $\Lambda(M)$ на многообразии M можно выделить подпространства *замкнутых* форм $C(M)$

$$\omega \in C(M): \quad \mathrm{d}\omega = 0 \tag{11.5}$$

и точных форм $E(M)$

$$\omega \in E(M): \quad \omega = \mathrm{d}\chi\,. \tag{11.6}$$

Очевидно,

$$E(M) \subset C(M)\,.$$

Задача 11.5. Почему?

Это позволяет определить фактор-пространство когомологий

$$H(M) := C(M)/E(M)\,. \tag{11.7}$$

Когда речь идет о формах определенной размерности p рассматривают пространства $C^p(M)$, $E^p(M)$ и $H^p(M) = C^p(M)/E^p(M)$.

Пространство $E^p(M)$ очевидно бесконечномерно: это бесконечномерное пространство форм χ в (11.6) (отфакторизованное по замкнутым). Пространство $C^p(M)$ еще больше. А вот пространство когомологий обычно оказывается конечномерным и несет существенную информацию о многообразии M.

Размерность $H^p(M)$ называется числов Бетти.

$$\dim H^p = \beta_p\,.$$

Задача 11.6. Что характеризует β_0?

Полином Пуанкаре

$$P_M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(M) z^n$$

n-мерный тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$:

$$P_{T^n}(z) = (1+z)^n$$

n-мерная сфера S^n

$$P_{S^n}(z) = 1 + z^n$$

Задача 11.7. Посчитать когомологии окружности S^1.

Важность того геометрического факта, что $H^1(S^1) \neq 0$, в физике иллюстрируется эффектом Ааронова-Бома, как мы обсудим, когда будем говорить о калибровочных полях.

11.20 Интеграл, теорема Стокса и законы сохранения

p-Формы интегрируются по p-мерным многообразиям. Интеграл

$$\int_{\Sigma^p} \omega = \int d^d x \epsilon^{\underline{n}_1 \cdots \underline{n}_d} \omega_{\underline{n}_1 \cdots \underline{n}_d}$$

оказывается не зависящим от выбора координат. Причина в том, что якобиан замены координат сокращается с якобианом, приходящим из подкрутки индексов формы за счет индексов символа Леви-Чивиты. Поэтому именно интеграл от дифференциальных форм, не зависящий от выбора координат, имеет инвариантный смысл.

Задача 11.8. Убедиться

Теорема Стокса утверждает, что

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \,,$$

где ∂M обозначает границу многообразия M.

Пусть Σ - замкнутое подмногообразие, т.е. $\partial\Sigma = 0$. Тогда интеграл $\int_{\Sigma^p} \omega$ равен нулю, если ω-точная форма. А что можно сказать, если ω-замкнутая форма?

Задача 11.9. Доказать, что если ω-замкнутая форма, то $\int_{\Sigma^p} \omega$ не зависит от локальных вариаций (непрерывных деформаций) поверхности интегрирования.

Где этот факт используется в физических приложениях? Это законы сохранения. Равенство

$$\int d^3 x q(t_1, \overrightarrow{x}) = \int d^3 x q(t_2, \overrightarrow{x})$$

следует понимать как результат интегрирования замкнутой три-формы по трехмерному пространству при фиксированном времени.

Давайте разберем как это происходит в теории поля на примере комплексного скалярного поля. Рассмотрим следующую $(d-1)$-форму

$$J := \epsilon^{\underline{n}_1 \cdots \underline{n}_d} \theta_{\underline{n}_2} \dots \theta_{\underline{n}_d} \left(\bar{\phi} \partial_{\underline{n}_1} \phi - \partial_{\underline{n}_1} (\bar{\phi}) \phi \right) \tag{11.8}$$

Задача 11.10. Доказать, что $\mathrm{d}J = 0$, если ϕ удовлетворяет уравнению КГФ с произвольной массой. Определенная таким образом $(d-1)$-форма сохраняющийся электромагнитный ток скалярного поля, а интеграл

$$Q = \int_{\Sigma^{d-1}} J \tag{11.9}$$

описывает электрический заряд скалярного поля, который не зависит от локальных вариаций Σ.

Если поля достаточно быстро убывают на пространственной бесконечности, интеграл от J по замкнутой поверхности, замыкающей две трехмерные поверхности при $t = t_1$ и $t = t_2$ в цилиндр на пространственной бесконечности. Надо заметить, что в релятивизме предположение, что поля убывают на бесконечности, совершенно естественно, так как если исходная конфигурация была когда-то локализована в какой-то компактной области пространства, то она и всегда будет обладать этим свойством в силу конечности скорости распространения сигналов.

Подчеркну, что за счет переформулировки в терминах дифференциальных форм мы доказали гораздо более общий факт, чем независимость заряда от времени - заряд не зависит от любых вариаций поверхности интегрирования. При использовании обычного языка этот факт совершенно не виден.

Известный факт, выражаемый теоремой Нетер, состоит в том, что законы сохранения тесно связаны с симметриями. Так заряд (11.8) связан с фазовой симметрией $\phi \to \exp[i\varphi]\,\phi$ ответственной за электромагнитное взаимодействие, как вам рассказывал Никита.

А можно ли таким образом построить другие законы сохранения? Ответ да. В частности, замкнуты следующие $(d-1)$-формы

$$J(F) := \epsilon^{\underline{n}_1\cdots\underline{n}_d}\theta_{\underline{n}_2}\dots\theta_{\underline{n}_d}\left(\bar{\phi}\partial_{\underline{n}_1}F(\partial)\phi - \partial_{\underline{n}_1}(\bar{\phi})F(\partial)\phi\right)\,, \tag{11.10}$$

где $F(\partial)$ произвольный полином от производных. Первый из этих токов с $F(\partial) = \partial^{\underline{n}}$ описывает закон сохранения импульса скалярного поля

$$P^{\underline{m}} := \epsilon^{\underline{n}_1\cdots\underline{n}_d}\theta_{\underline{n}_2}\dots\theta_{\underline{n}_d}\left(\bar{\phi}\partial_{\underline{n}_1}\partial^{\underline{m}}\phi - \partial_{\underline{n}_1}(\bar{\phi})\partial^{\underline{m}}\phi\right)\,. \tag{11.11}$$

Старшие законы сохранения с $F(\partial)$ более высоких степеней отвечают симметриям высших спинов, за которые отвечают поля Фронсдала.

Лекция 12.
2 курс. Осенний семестр, 12 декабря 2019.

12.21 Поля Янга-Миллса как дифференциальные формы

12.21.1 Абелев случай - электродинамика

Электромагнитное поле описывается вектор-потенциалом $A_{\underline{n}}$ и напряженностью электромагнитного поля

$$F_{\underline{nm}} = \partial_{\underline{n}} A_{\underline{m}} - \partial_{\underline{m}} A_{\underline{n}} \,.$$

$o(3)$ - ковариантные компоненты $F_{\underline{nm}}$ отождествляются с электрическим и магнитным полями, соответственно.

Задача 12.1. Как?

В классической физике электромагнитное взаимодействие описывается только электромагнитной напряженностью. В квантовой, в основные уравнения вводит вектор-потенциал. В обоих случаях уважается калибровочная инвариантность

$$\delta A_{\underline{n}}(x) = \partial_{\underline{n}} \varphi(x)$$

Интерпретация в терминах дифференциальных форм очевидна. Вектор-потенциал является один-формой

$$A = dx^{\underline{n}} A_{\underline{n}} \,.$$

Напряженность поля является его дифференциалом

$$F := \mathrm{d} A \,, \tag{12.1}$$

а калибровочная инвариантность имеет вид

$$\delta A = \mathrm{d}\varphi \,.$$

Очевидно, $\delta F = 0$.

В силу своего определения, напряженность удовлетворяет тождеству Бианки

$$\mathrm{d} F = 0 \,.$$

Эти уравнения называются первой парой уравнений Максвелла (парой, поскольку они содержат два уравнения в трехмерной постановке).

Вторая пара уравнений Максвелла имеет вид

$$\mathrm{d} F^* = J^* \,,$$

где * обозначает преобразование дуальности Ходжа

$$F^*_{\underline{nm}} := \frac{1}{2} \epsilon_{\underline{nm}}{}^{\underline{pr}} F_{\underline{pr}} \,,$$

а J^* - замкнутая три форма тока

$$\mathrm{d}J^* = 0\,,$$

Ходж-дуальная обычному току $J^{\underline{n}}(x)$, удовлетворяющему закону сохранения

$$\partial_{\underline{n}} J^{\underline{n}}(x) = 0\,.$$

Задача 12.2. В чем физический смысл уравнения сохранения?

Важное обстоятельство состоит в том, что индексы в преобразовании Ходжа опускаются метрическим тензором, который, тем самым, явно входит в уравнения Максвелла. Про это надо помнить в частности при преобразованиях координат.

Замечу, что J это те самые сохраняющиеся токи, которые мы построили из скалярных полей. Аналогично, сохраняющиеся токи могут быть построены из других свободных полей - например, поля Дирака, т.е. электрона.

Поскольку F замкнутая форма - любая функция (полином) F (но не F^*) в рамках внешней алгебры,

$$\Phi(F(\theta, x))$$

является замкнутой формой. Поэтому интегралы по поверхностям Σ не зависят от вариаций поверхности

$$\int_\Sigma \Phi(F(\theta, x))\,.$$

Мы используем удобную и математически мотивированную конвенцию, что интеграл от p-формы по q-мерной поверхности отличен от нуля только при $p = q$.

Эти интегралы также не зависят от вариаций вектор-потенциала A.

Задача 12.3. Доказать.

Тем самым они характеризуют не столько поле, сколько многообразия, по которым интегрируется, задавая их топологические характеристики, называемые классами Черна (при обобщении на неабелев случай, который мы еще обсудим).

Наконец, пусть $F = 0$. Связность A, удовлетворяющая этому условию, называется *плоской.* Таким образом, плоская абелева связность по определению является замкнутой. Плоская связность называется *нетривиальной*, если она не сводится к чистой калибровке, т.е. не является точной. Таким образом, пространство нетривиальных плоских абелевых связностей совпадает с $H^1(M)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть имеется бесконечно тонкий и бесконечно длинный соленоид, по которому течет ток, создающий магнитное поле внутри соленоида. Вне соленоида в этом случае магнитное поле отсутствует. Но из уравнения (11.12) и теоремы Стокса следует, что $\int_{S_1} A = \int_{\Sigma^2} H \neq 0$ где Σ_2 часть плоскости ортогональной соленоиду, окруженная окружностью S^1. Ненулевой вклад приносится как раз когомологией H^1 на плоскости с выколотой точкой, которая эквивалентна когомологии $H^1(S^1)$.

Эффект Ааронова-Бома состоит в том, что хотя все явления, происходящие вне экранированного соленоида, в классике его не чувствуют, в квантовой механике это не так, поскольку уравнение Шредингера содержит сам потенциал (хотя и не нарушает калибровочную инвариантность). Это явление дает пример физических проявлений когомологий.

12.21.2 Неабелевы поля

Напомню, что поле Янга-Миллса это один-форма $A_{\underline{n}}{}^i$ со значениями в присоединенном представлении некоторой алгебры Ли g. Иными словами

$$A(x) = \theta^{\underline{n}} A_{\underline{n}}{}^i(x) e_i\,, \qquad [e_i\,, e_j] = f_{ij}^k e_k\,.$$

Эквивалентно, можно считать, что поле Янга-Миллса принимает значения в том или ином представлении T алгебры g

$$A^A{}_B(x) = \theta^{\underline{n}} A_{\underline{n}}(x)^i T_i{}^A{}_B\,, \qquad [T_i\,, T_j] = f_{ij}^k T_k\,.$$

Ковариантная производная в соответствующем g-модуле имеет вид

$$D\Phi^A(x) = \mathrm{d}\Phi^A(x) - A^A{}_B(x)\Phi^B(x)\,.$$

Два-форму кривизны мы определим формулой

$$F_{\underline{nm}} := \frac{1}{2}\left(\partial_{\underline{n}} A_{\underline{m}} - \partial_{\underline{m}} A_{\underline{n}} - [A_{\underline{n}}\,, A_{\underline{m}}]\right)\,, \tag{12.2}$$

где скобки [] обозначают как обычно лиевское произведение. В терминах внешней алгебры это выражение эквивалентно следующему

$$F(x) = \mathrm{d}A(x) - A(x)A(x)\,, \tag{12.3}$$

где, используя, что произведение один-форм антисимметрично, введено обозначение

$$AA := \frac{1}{2}[A\,, A]$$

Задача 12.4. Убедиться, что антисимметрия внешнего произведения порождает коммутатор матриц $A_{\underline{n}}{}^A{}_B$.

Задача 12.5. Убедится, что

$$DD = F \tag{12.4}$$

или, что эквивалентно,

$$DD\Phi^A(x) = F^A{}_B(x)\Phi^B(x)\,.$$

Это согласуется с тем, что для $A = 0$, $D = \mathrm{d}$ и $\mathrm{d}^2 = 0$.

Законы калибровочных преобразований имеют вид

$$\delta A(x) = \mathrm{d}\epsilon(x) - [A(x)\,, \epsilon(x)]\,, \tag{12.5}$$

где калибровочный параметр $\epsilon(x)$ - ноль-форма со значениями в g, т.е. ε^i или $\varepsilon^A{}_B := \varepsilon^i T_i{}^A{}_B$.

Закон преобразований A можно записать в виде

$$\delta A = D\varepsilon\,, \qquad D\varepsilon := \mathrm{d}\varepsilon - [A\,,\varepsilon]\,. \tag{12.6}$$

Задача 12.6. Убедится, что

$$\delta F = -[F\,,\varepsilon]\,.$$

В силу своего определения напряженность удовлетворяет тождеству Бьянки

$$DF := \mathrm{d}F - [A\,,F] = 0$$

Задача 12.7. Доказать, используя (11.15).

Сегодня я не буду рассказывать все остальные подробности теории Янга-Миллса. С этого начнутся лекции в следующем семестре уже в ФИАНе. Чтобы оставить время для зачета, ограничусь следующим замечанием. Формализм полей Янга-Миллса - это формализм связностей. С некоторыми вариациями, касающимися формы действия и уравнений движения, он применим к широкому классу задач, в основе которых лежат калибровочные симметрии. К ним относится теория гравитации по Картану и теория калибровочных полей высших спинов. В первом случае в качестве калибровочной алгебры можно взять алгебру Пуанкаре, а во втором - алгебру высших спинов. Подробности - в следующем семестре.